Hjälpmedel: Inga, inte ens typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Aron Lagerberg
076-272 18 61

Matematik
HC

MAM100, Linjär algebra

Tentamen den 20 december 2006, 8.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Ge inga motiveringar utan svara endast sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Vektorn $(1, 1, 2)$ är parallell med planet $x + 2y - z = 3$.

   (b) Vektorerna $(1, 1, 2, 2)$, $(3, 3, 4, 4)$ och $(5, 5, 6, 6)$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.

   (c) Vektorn $\mathbf{v} = (1, 2)$ är en egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

   (d) Låt A vara en matris med fyra rader och fyra kolonner och antag att avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är injektiv (”one-to-one”). Då är avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ också alltid surjektiv (”onto”).

   (e) Om A är en matris med fyra rader och tre kolonner så kan avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ inte vara injektiv (”one-to-one”).

   (f) Det finns en symmetrisk 2×2-matris A sådan att vektorerna $(2, 3)$ och $(2, -1)$ är egenvektorer till A med egenvärdena 1 respektive 2.

   (g) Den avbildning A på $\mathbb{R}^2$ som roterar punkter $90°$ moturs har en reell egenvektor.

   (h) Den avbildning A på $\mathbb{R}^2$ som speglar punkter i linjen $y = x$ har en reell egenvektor.

Vänd!

2. Bestäm skärningspunkten mellan linjen som går genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(-1, 2, 0)$ och planet $3x + 4y - z = 3$.

3. Låt $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1)$. Utvidga $\mathbf{f}_1$ till en bas för $\mathbb{R}^3$.

4. Bestäm en bas för nollrummet och kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} .$$

5. Låt A vara en godtycklig $m \times n$-matris. Visa A och $A^T A$ har samma nollrum.

6. (a) Bestäm egenvektorerna och egenvärdena till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Beräkna A^n för alla positiva heltal n.

7. Låt W vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$. Visa att varje vektor $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ entydigt kan skrivas

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

   där $\hat{\mathbf{y}}$ ligger i W och $\mathbf{z}$ i $W^\perp$.
   ($W^\perp$ är det ortogonala komplementet till W.)

8. (a) Visa att om ett vektorrum V har en bas med fyra vektorer så är fem vektorer i V alltid linjärt beroende.

   (b) Visa att $\mathbb{R}^4$ har dimensionen fyra.