MAM100, Linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 20 dec. 2006

1. (a) Falskt.
   Planet har normalvektorn $(1, 2, -1)$. Eftersom $(1, 2, -1)\cdot(1, 1, 2) = 1 \neq 0$ är vektorn *inte* parallell med planet.

   (b) Falskt.
   Det är tre vektorer men en bas för $\mathbb{R}^4$ består alltid av fyra vektorer.

   (c) Sant.
   Vi har $A\mathbf{v} = (6, 12) = 6\mathbf{v}$ så $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet 6.

   (d) Sant.
   Eftersom A är injektiv har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en entydig lösning. Så alla kolonnerna i A är pivotkolonner. Eftersom A är kvadratisk är därför $A \sim I$ och A är inverterbar.

   (e) Falskt.
   T.ex. är avbildningen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definierad av $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$ injektiv.

   (f) Falskt.
   Vi har $(2, 3) \cdot (2, -1) = 1 \neq 0$. Men egenvektorer med olika egenvärden till en symmetrisk matris är ortogonala.

   (g) Falskt.
   Att $\mathbf{u}$ är en egenvektor betyder att $A\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}$ är parallella men för vår rotation är $A\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}$ vinkelräta.

   (h) Sant.
   För vektorn $\mathbf{u} = (1, 1)$ gäller $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ så $\mathbf{u}$ är en reell egenvektor (med egenvärdet 1).

2. Vektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 1) - (-1, 2, 0) = (2, -1, 1)$ är en riktningsvektor för linjen. Så den har parameterframställningen $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, -1, 1) = (1 + 2t, 1 - t, 1 + t)$. Stoppar vi in detta i planets ekvation får vi $3(1+2t)+4(1-t)-(1+t) = 3$ eller $t = -3$. Så skärningspunkten är $(-5, 4, -2)$.

3. Vi låter $\mathbf{f}_2 = (1, -1, 0)$. Eftersom $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$ är $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ ortogonala. Vektorn $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$ är vinkelrät mot både $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ så om vi sätter

$$\mathbf{f}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -2)$$

är $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ en sådan bas.

4. Gaussellimination ger

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så den första och tredje kolonnen är pivotkolonner och alltså är $(1, 1, 2)$ och $(0, 1, 1)$ en bas för kolonnrummet.

Vi ser också att att $\mathbf{x}_2$ och $\mathbf{x}_4$ är fria och att lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är

$$A = \begin{cases} x_1 = -2s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = -3t \\ x_4 = t \end{cases} \quad \text{eller } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Så $(1, 0, 3, -1)$ och $(2, -1, 0, 0)$ är en bas för nollrummet.

5. Vi skall visa att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ omm $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\Rightarrow$) Om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så gäller $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$\Leftarrow$) Om $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så är $|A\mathbf{x}|^2 = A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{0} = 0$. Så $|A\mathbf{x}| = 0$ och $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

6. (a)

Egenvärden:

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 3^2 = 0$ så $\lambda = 4$ eller $\lambda = -2$.

Egenvektorer:

$\lambda = 4$.

$A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så en egenvektor är $\mathbf{u} = (1, 1)$.

$\lambda = -2$.

$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så en egenvektor är $\mathbf{v} = (1, -1)$.

(b)

Låt $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Då gäller $A = \dfrac{1}{2} QDQ^T = \dfrac{1}{2} QDQ$ ($\frac{1}{2}$ beror på att kolonnvektorerna har längden $\sqrt{2}$). Så $A^n = \dfrac{1}{2} QD^nQ =$
$\ldots = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 4^n + (-2)^n & 4^n - (-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{bmatrix}$.

7. Se läroboken, Th. 8, Kap. 6.3, sid. 395.

8. (a) Se utdelad stencil (eller läroboken, Th. 9, Kap. 4.5, sid. 256.)

   (b) Standardbasen i $\mathbb{R}^4$ består av fyra vektorer. Enligt (a) gör alla baser det och alltså är dimensionen fyra.