Matematik
HC

Hjälpmedel: Inga, inte ens
typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Martin Berglund
076-272 18 61

MMG200, Linjär algebra

Tentamen den 20 december 2006, 8.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Ge inga motiveringar utan svara endast sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Linjerna $(x, y) = (1, 2) + t(-2, 3)$ och $3x + 2y = 5$ är parallella.

   (b) Vektorn $\mathbf{v} = (2, 1)$ är en egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (c) Det finns en 2×3-matris A så att den linjära avbildningen $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ är injektiv ("one-to-one").

   (d) Det finns en matris A och en vektor $\mathbf{b}$ så att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ men ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har flera lösningar.

   (e) Om Q är en ortogonalmatris så har så ekvationen $Q\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (f) Det finns en 2×2 matris A sådan att $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (g) Det finns en symmetrisk matris A sådan att vektorerna $(2, 1)$ och $(-1, 2)$ är egenvektorer till A med egenvärdena 1 respektive 2.

   (h) Den avbildning A på $\mathbb{R}^2$ som speglar punkter i linjen $y = 5x$ har egenvärdet -1.

Vänd!

2. Bestäm avståndet mellan punkten $P = (2, -2, -1)$ och planet $2x + z = 4$.

3. Låt A vara matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & p \end{bmatrix}$$
där p är en reell parameter.

   (a) Bestäm p så att matrisens rang blir 3.

   (b) Bestäm en bas för kolonnrummet till A för detta p.

   (c) Bestäm en bas för nollrummet till A för detta p.

4. Låt $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{e}_2 = (1, -2, 1)$. Utvidga $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ till en ortogonalbas för $\mathbb{R}^3$. Vad blir koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3)$ i denna bas?

5. Bestäm ekvationen för den räta linje som bäst ansluter till punkterna $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -2)$ och $(2, -2)$.

6. Låt matrisen A vara definierad av
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
och betrakta det dynamiska systemet $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

   (a) Bestäm alla jämviktslägen till systemet, dvs. alla vektorer $\mathbf{x}_0$ så att $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ för alla n.

   (b) Bestäm alla begynnelsevektorer $\mathbf{x}_0$ så att $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$.

7. Låt V vara ett delrum till $\mathbb{R}^7$ med $\dim(V) = 2$ och $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektorer i V. Visa att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt beroende.

8. Låt A vara en 3×3-matris och $\mathbf{v}$ en vektor sådan att $A^4\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Visa att $A^3\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Ledning(?): Observera att vektorerna $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}$ är linjärt beroende.