

MMG200, Linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 20 dec. 2007

1. (a) Sant.
Riktningsektorn för den första linjen, $(-2, 3)$, och normalvektorn för den andra, $(3, 2)$ är ortogonala.
 - (b) Sant.
Eftersom $A\mathbf{v} = (6, 3) = 3(2, 1) = 3\mathbf{v}$ är \mathbf{v} en egenvektor med egenvärdet 3.
 - (c) Falskt.
Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har högst två pivotelement (ett i varje rad) så det finns minst en fri variabel och alltså har ekvationen oändligt många lösningar.
 - (d) Falskt.
Att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har entydig lösning betyder att det inte finns någon fri variabel. Det gäller också för $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så om det finns en lösning är den entydig.
 - (e) Sant.
Eftersom $Q^T Q = I$ gäller $\mathbf{x} = I\mathbf{x} = Q^T Q\mathbf{x} = Q^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
 - (f) Falskt.
Villkoret $AA^{-1} = I$ medför att både A och A^{-1} är inverterbara.
Men $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är *inte* inverterbar.
 - (g) Sant.
Observera att $(2, 1)$ och $(-1, 2)$ är ortogonala. Så $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ är en ortogonal matris. Så om $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ så uppfyller $A = QDQ^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ villkoren.
 - (h) Sant.
En vektor \mathbf{v} som är ortogonal mot linjen uppfyller att $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, så \mathbf{v} är en egenvektor med egenvärdet -1 .
2. Planet har normalvektorn $\mathbf{n} = (2, 0, 1)$. Låt $Q_t = P + t\mathbf{n} = (2 + 2t, -2, -1 + t)$ och välj t så att Q_t ligger i planet dvs.

$(2 + 2t) + (-1 + t) = 4$ eller $t = \frac{1}{5}$. Då gäller att avståndet är
 $d = |\overrightarrow{PQ_{\frac{1}{5}}}| = |\frac{1}{5}\mathbf{n}| = \frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Gausselimination ger

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & p-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Om $p = 1$ har A rang 3, annars är rangen 4.
 (b) Pivotkolonnerna (de tre första) i A är en bas för kolonnrummet. Så $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$ och $(1, -1, 1, 1)$ är en bas för kolonnrummet.
 (c) Variabeln x_4 är fri så med $x_4 = 2t$ får vi lösningen

$$\begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = -5t \\ x_3 = -t \\ x_4 = 2t \end{cases} \quad \text{eller } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Så $(4, -5, -1, 2)$ är en bas för nollrummet.

4. Eftersom $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = (3, 0, -3) = 3(1, 0, -1)$ är \mathbf{e}_3 vinkelrät mot både \mathbf{e}_1 och \mathbf{e}_2 . Så \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 och \mathbf{e}_3 är en ortogonalbas.

Om $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, och (x, y, z) dess koordinater i den nya basen gäller

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}.$$

Skalärmultiplikation med \mathbf{e}_1 ger $x\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}$ eller $2x = 6$ och $x = 2$. På liknande sätt får vi $y\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}$, $6y = 0$ och $y = 0$, samt $z\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}$, $2z = -2$ och $z = -1$. Alltså har \mathbf{v} koordinaterna $(2, 0, 1)$ i den nya basen.

5. Idealt vill vi att den sökta linjen $y = ax + b$ skall uppfylla

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ b = 0 \\ a + b = -2 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

Minstakvadratlösningen till detta system ges av $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nu är $A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ och $A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vi får systemet $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & -7 \\ 2 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & -7 \\ -10 & 0 & 11 \end{array} \right)$

med lösningen $a = -11/10$ och $b = -2/10$. Så den sökta linjen är $y = \frac{1}{10}(-11x - 2)$.

6. (a)

Att $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ eller $(A - I)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ger

$$A - I \sim 2A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

med lösningen $\mathbf{x}_0 = t(1, 1, 1)$

(b)

Vi bestämmer egenvärdena. Vi har

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \frac{1}{8} \det(2A - 2\lambda I) = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{addera de två första} \\ \text{raderna till den sista} \end{array} \right) = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 2 - 2\lambda & 2 - 2\lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4}(1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \frac{1}{4}(\lambda - 1)(2\lambda - 1)(2\lambda + 1). \end{aligned}$$

Så egenvärdena är 1 , $\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{2}$.

Enligt (a) vet vi att $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ är en egenvektor till med egenvärdet 1 . Låt \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 vara egenvektorer med egenvärdena $\frac{1}{2}$ respektive $-\frac{1}{2}$. Eftersom A är symmetrisk vet vi att \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 är en ortogonalbas för \mathbb{R}^3 . Så varje vektor \mathbf{x}_0 kan skrivas

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 .$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= A^n \mathbf{x}_0 = c_1 A^n \mathbf{v}_1 + c_2 A^n \mathbf{v}_2 + c_3 A^n \mathbf{v}_3 \\ &= c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 + c_3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_3 \rightarrow c_1 \mathbf{v}_1, n \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Så $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$, när $c_1 = 0$ dvs. när $\mathbf{x}_0 \in \text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. $\text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är det ortogonala komplementet till \mathbf{v}_1 . För att beskriva detta explicit observerar vi att vektorerna $(1, -1, 0)$ och $(1, 1, -2)$ tillsammans med \mathbf{v}_1 är en ortogonalbas för \mathbb{R}^3 . Alltså gäller $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$ när $\mathbf{x}_0 \in \text{Span}\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$.

Anmärkning. Vektorerna $(1, -1, 0)$ och $(1, 1, -2)$ är inte egenvektorer till A men $\text{Span}\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. En kalkyl visar att $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$ och $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 1)$ så ett alternativt svar är att $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$ när $\mathbf{x}_0 \in \text{Span}\{(1, 0, -1), (1, -2, 1)\}$.

7. Låt \mathbf{e}_1 och \mathbf{e}_2 vara en bas för V . Då gäller

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 = x_3 \mathbf{e}_1 + y_3 \mathbf{e}_2 \end{cases} .$$

Antag att

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} . \quad (1)$$

Detta kan skrivas

$$c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

eller

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} .$$

Detta är ett ekvationssystem med fler obekanta (tre) än ekvationer (två), så (1) har alltså en icke-trivial lösning. Alltså är \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 och \mathbf{u}_3 linjärt beroende.

8. Vi observerar först att $A^5 \mathbf{v} = AA^4 \mathbf{v} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ och $A^6 \mathbf{v} = AA^5 \mathbf{v} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Antag nu att

$$c_0 \mathbf{v} + c_1 A \mathbf{v} + c_2 A^2 \mathbf{v}_2 + c_3 A^3 \mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Genom att i tur och ordning applicera A , A^2 och A^3 på denna ekvation får vi

$$\begin{cases} c_0 \mathbf{v} + c_1 A \mathbf{v} + c_2 A^2 \mathbf{v}_2 + c_3 A^3 \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ c_0 A \mathbf{v} + c_1 A^2 \mathbf{v}_2 + c_2 A^3 \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ c_0 A^2 \mathbf{v}_2 + c_1 A^3 \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ c_0 A^3 \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} .$$

Om $A^3 \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ får vi $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$ vilket innebär att de fyra vektorerna \mathbf{v} , $A \mathbf{v}$, $A^2 \mathbf{v}$, $A^3 \mathbf{v}$ är linjärt oberoende. Men fyra vektorer i \mathbb{R}^3 är alltid linjärt beroende. Alltså gäller $A^3 \mathbf{v} = \mathbf{0}$.