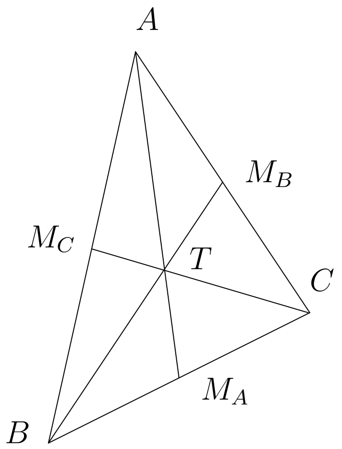
En triangels tyngdpunkt.

Här ger vi ett alternativt bevis för att medianerna i en triangel skär varandra i en punkt. Beviset utnyttjar inte att vi på förhand har gissat att tyngdpunkten delar medianen i förhållandet 2 : 1

Sats 1. *(En triangels tyngdpunkt.)*
Medianerna i en triangel skär varandra i en punkt. Denna punkt delar medianen i förhållandet 2 : 1 *från spetsen räknat.*



Om O är en godtycklig punkt så gäller

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) .$$

Bevis. Låt M_A, M_B och M_C vara triangelsidornas mittpunkter (se figur) och T vara skärningspunkten mellan AM_A och BM_B. Eftersom $\overrightarrow{AM_A}$ och $\overrightarrow{AT}$ är lika riktade gäller $\overrightarrow{AT} = a\,\overrightarrow{AM_A}$ för någon skalär a. På samma sätt gäller $\overrightarrow{BT} = b\,\overrightarrow{BM_B}$.

Eftersom M_A och M_B är mittpunkter på sträckan BC respektive AC så gäller $\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ och $\overrightarrow{BM_B} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$. Så

$$\overrightarrow{AT} = \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \text{ och } \overrightarrow{BT} = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) .$$

Detta ger

$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{BA} + \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{a}{2}\,\overrightarrow{AC} ,$$

men också

$$\overrightarrow{BT} = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = b\,\overrightarrow{BA} + \frac{b}{2}\,\overrightarrow{AC}\ .$$

Detta ger

$$\left(\frac{a}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{a}{2}\,\overrightarrow{AC} = b\,\overrightarrow{BA} + \frac{b}{2}\,\overrightarrow{AC}$$

och

$$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right)\overrightarrow{AB} = \frac{b-a}{2}\,\overrightarrow{AC}\ .$$

Men vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är *inte* parallella och därför är

$$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right) = \frac{b-a}{2} = 0$$

vilket ger $a = b = \dfrac{2}{3}$.

Beviset är nu väsentligen klart. Observera att vi har visat att $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Detta kan skrivas om på ett symmetriskt sätt. Om O är en godtycklig punkt gäller $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Om T' är skärningspunkten mellan $\overrightarrow{AM_A}$ och $\overrightarrow{CM_C}$ (eller $\overrightarrow{BM_B}$ och $\overrightarrow{CM_C}$) får vi på samma sätt som ovan att $\overrightarrow{OT'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ och alltså gäller $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'}$ och $T = T'$. ■