Tentamensskrivning i Matematik 1, MMG200, Inledande algebra
Datum: 2007-10-27 kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Martin Berglund, 076-272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

1. a) Definiera begreppen *delare*, *äkta delare* och *primtal*.
   b) Låt a, b och c vara heltal. Visa att $a|(xb + yc)$ för alla heltal x och y om $a|b$ och $a|c$.
   c) Visa att det finns oändligt många primtal. (4p)

2. a) Definiera begreppen *ekvivalensrelation* (inklusive definitioner av de olika egenskaperna) och *ekvivalensklass*.
   b) Låt relationen $\mathcal{R}$ vara definierad på $M = \{2, 3, 4, \ldots\}$ genom

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{SGD}(x, y) > 1.$$

   Avgör om $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. (3p)

3. Nedan ges kroppsaxiomen för en kropp $\langle M, +, \cdot\rangle$.

   Addition:

   a) $\forall a, b \in M : \quad a, b \in M \Rightarrow a + b \in M$ (slutenhet)
   b) $\forall a, b, c \in M : \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (associativitet)
   c) $\forall a, b \in M : \quad a + b = b + a$ (kommutativitet)
   d) $\exists\, 0 \in M : \forall a \in M : \quad 0 + a = a + 0 = a$ (neutralt element)
   e) $\forall a \in M : \exists -a \in M : \; a + (-a) = (-a) + a = 0$ (motsatt elem)

   Multiplikation:

   a) $\forall a, b \in M : \quad a, b \in M \Rightarrow ab \in M$ (slutenhet)
   b) $\forall a, b, c \in M : \quad (ab)c = a(bc)$ (associativitet)
   c) $\forall a, b \in M : \quad ab = ba$ (kommutativitet)
   d) $\exists\, 1 \in M : \forall a \in M : \quad 1a = a1 = a$ (neutralt element)
   e) $\forall a \in M \setminus \{0\} : \exists\, a^{-1} \in M : \quad aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (inverst element)

   Addition och multiplikation:

   a) $\forall a, b, c \in M : \quad a(b + c) = ab + ac$ (distributivitet)

   Visa att i en godtycklig kropp gäller

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ eller } b = 0. \qquad (1)$$

   Använd bara ett kroppsaxiom i taget och ange vilket axiom som används i varje steg. Ge exempel (med motivering) på en ring där (1) inte gäller. (3p)

4. Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att

   a) f är injektiv men inte surjektiv.

   b) f är surjektiv men inte injektiv.

   c) f varken är injektiv eller surjektiv.

   Rita figurer! (3p)

5. a) Formulera negationen av följande utsaga (utan att använda "icke"- symbolen).

$$\forall \epsilon > 0 \ : \exists \delta > 0 \ : \forall x \in D_f \ : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \qquad (1,5p)$$

   b) Bestäm med hjälp av Euklides algoritm heltal x och y sådana att

$$4052x + 405y = 1 \qquad (1,5p)$$

.

6. Sju skidåkare, vi kan kalla dem A,B,C,D,E,F och G, tävlar i störtlopp. Hur många möjliga resultatlistor finns det om vi med säkerhet vet att A alltid åker snabbare än B, som i sin tur alltid åker snabbare än C? Vi förutsätter att inga åkare kan hamna på samma placering. (3p)

7. Låt $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ och $a_n = 5a_{n-1} - 7a_{n-2} + 3a_{n-3}$ för $n = 3, 4, 5, \ldots$ Visa med induktion att $a_n = 3^n - n$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. (3p)

8. Låt p vara ett primtal och låt $n \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

   a) Visa att $\{[n], [2n], \ldots, [(p-1)n]\} = \{[1], [2], \ldots, [p-1]\}$, där $[r]$ betecknar restklassen modulo p till r, för godtyckliga heltal r.

   b) Visa att

$$n^{p-1} \equiv 1 (\text{mod p}). \qquad (3p)$$

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 16 november. Ditt resultat meddelas via mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.