1. a) Definiera begreppen *funktion*, inklusive dess *definitions-, mål-* samt *värdemängd*, *injektiv funktion* och *surjektiv funktion*.

   b) Ge exempel som tydligt illustrerar begreppen du definierat. (3p)

2. a) Definiera begreppen *delare*, *trivial delare* och *primtal*.

   b) Formulera aritmetikens fundamentalsats. Förklara skillnaden mellan existensen och entydigheten i satsen.

   c) Bevisa entydigheten (enbart denna) i aritmetikens fundamentalsats. (4p)

3. Denna uppgift handlar om konstruktionen av de hela talen, givet de naturliga talen. Vi antar alltså att de naturliga talen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ finns och att de vanliga räknelagarna (inklusive strykningslagen) för addition och multiplikation gäller, samt att vi har en ordningsrelation på $\mathbb{N}$. Låt relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vara definierad genom

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \text{ om och endast om } a + d = b + c.$$

   a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   b) Definiera de hela talen med hjälp av ekvivalensklasserna som hör till $\mathcal{R}$. Ge exempel (hur definieras t.ex. talet -3 ?). Definiera operationerna addition och multiplikation för heltalen (dvs för ekvivalensklasserna).

   c) Nedan ges axiomen för att $\langle M, +, \cdot\rangle$ är en kropp. Vilka (utan bevis) av dem är uppfyllda för heltalen? Verifiera axiomen d), e) och i). (4p)

   a) $\forall a, b \in M : \ a, b \in M \Rightarrow a + b \in M$ (slutenhet)

   b) $\forall a, b, c \in M : \ (a + b) + c = a + (b + c)$ (associativitet)

   c) $\forall a, b \in M : \ a + b = b + a$ (kommutativitet)

   d) $\exists\, 0 \in M : \forall a \in M : \ 0 + a = a = a + 0$ (neutralt element)

   e) $\forall a \in M : \exists\, a' \in M : \ a + a' = 0 = a' + a$ (motsatt element)

   f) $\forall a, b \in M : \ a, b \in M \Rightarrow ab \in M$ (slutenhet)

   g) $\forall a, b, c \in M : \ (ab)c = a(bc)$ (associativitet)

   h) $\forall a, b \in M : \ ab = ba$ (kommutativitet)

   i) $\exists\, 1 \in M : \forall a \in M : \ 1a = a = a1$ (neutralt element)

   j) $\forall a \in M \setminus \{0\} : \exists\, a' \in M : \ aa' = 1 = a'a$ (inverst element)

   k) $\forall a, b, c \in M : \ a(b + c) = ab + ac$ (distributivitet)

4. Lös ekvationen $\sqrt{x+4} = \sqrt{2x} - 2\,.$ (2p)

5. Bestäm resten då man dividerar $47^{2139} + 46^{2139}$ med $13\,.$ (3p)

6. Visa att

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$$

för $n = 3, 4, 5, \ldots$. (3p)

7. Hur många av delmängderna till $\{1, 2, \ldots, 10\}$ innehåller åtminstone två udda tal? (3p)

8. Eftersom 83 är ett primtal vet vi, enligt en sats, att $\langle \mathbb{Z}_{83}, \bigoplus, \bigodot \rangle$ är en kropp. Beräkna (den multiplikativa) inversen till [53] i $\mathbb{Z}_{83}$.
OBS: av lösningen ska framgå en metod med vilken man kan beräkna inversen till vilket (nollskilt) element som helst i $\mathbb{Z}_{83}$.
(Man får alltså inga poäng om man "bara" lyckas hitta inversen utan allmän metod och sen visar att det är en invers.) (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 8 februari. Ditt resultat meddelas via mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.