Linjär algebra

Föreläsning 2

GU

2008

Samuel Bengmark

Först lite information

- Kursupplägg
- Gruppuppgifter från ~torsdagar
- Torsdag 20 november blir onsdag 19 november.
- Matlabskivor.
  - http://licenser.gu.se/student/matlab.htm
- Gruppindelning

Förra gången

- Introduktion av ämnet.
- Vektorgeometri
  - Längd och riktning
  - Addition
  - Multiplikation med skalär
  - Linjärkombination
  - Bas: Varje vektor kan skrivas som en linjärkombination.
  - En första sats: Tre vektorer som ej ligger i ett plan utgör en bas.
  - Origo och koordinatsystem.
  - Koordinater och ortsvektor
  - Skalärprodukt …

Addition och multiplikation med skalär på koordinatform

Addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

Hur ser man det blir så?

Mer allmänt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \cdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

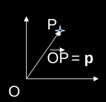
Multiplikation med skalär

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \cdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Hur ser man det blir så?

Punkter och ortsvektorer

Varje punkt P i $\mathbb{R}^2$ motsvarar en ortvektor **p**.



Omvänt motsvarar varje vektor **p** en punkt P. För att hitta den så vektorn så att den startar i origo. P är då ändpunkten för ortsvektorn.

Skalärprodukt – vad?

Definition av $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha$$

där α är (minsta) vinkeln mellan vektorerna

Tre viktiga observationer

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Räkneregler

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Idag

- Mer om skalärprodukt.
- Ortogonal projektion.
- Vektorprodukt (bara i $\mathbb{R}^3$)
- Linjer och plan $\mathbb{R}^3$
  - Parametrisering
  - Ekvationer/normalform

Skalärprodukt – hur?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

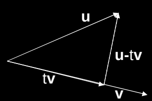
Detta gäller i ON-bas på grund av nedanstående regler. Hur kan man se det? … på tavlan …

Skalärprodukt – varför?

1. Beräkna vinkeln mellan två vektorer.

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\sum_i u_i v_i}{\sqrt{\sum_i u_i^2}\sqrt{\sum_i v_i^2}}$$

2. Projicera vektor ortogonalt på vektor



$$0 = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - t(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$
$$\Rightarrow t = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$
$$\Rightarrow \text{projektionen av } \mathbf{u} \text{ på } \mathbf{v} \text{ ges av } \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

Man kan använda detta för att beräkna avståndet mellan en punkt och en linje. Hur då?

Orientering

Ordningen de skrivs i spelar roll!

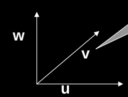
Tre vektorer **u**,**v** och **w** sägs utgöra ett högersystem om

u pekar som tummen

v pekar som pekfingret

w pekar som långfingret

v pekar inåt i tavlan



OBS!

u,**w** och **v** ett vänstersystem.

Vektorprodukt – vad?

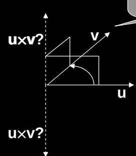
Definition av **u** × **v**

1. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\alpha$
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot bade $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ är en högerorienterad trippel

v pekar inåt i tavlan

Två viktiga observationer

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$



Räkneregler

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. $(\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

Vektorprodukt – hur?

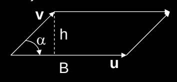
Hur ser man det?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$$

Detta gäller alltså bara i högerorienterat ON-system!

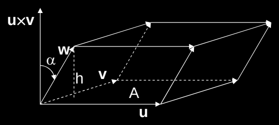
Vektorprodukt – varför?

1. Area av parallellogram och triangel i $\mathbb{R}^3$ (även i $\mathbb{R}^2$,hur då?)



$$B = |\mathbf{u}| \text{ och } h = |\mathbf{v}|\sin\alpha \Rightarrow$$
$$Arean = Bh = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$$

2. Volym av parallellepiped och tetraeder



$$A = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}| \text{ och } h = |\mathbf{w}|\cos\alpha \Rightarrow$$
$$\text{Volymen} = Ah =$$
$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\alpha = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

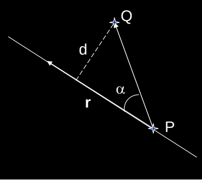
Vektorprodukt – mera varför?

Avstånd mellan punkt och linje.

- Tag en godtycklig punkt P på linjen och bilda vektorn PQ.
- Låt α vara vinkeln mellan PQ och linjens riktningsvektor vara **r**.
- Då ges avståndet av

d = |PQ| sin α

= |**r**| |PQ| sin α |**r**|$^{-1}$ $= \dfrac{|\mathbf{r}\times PQ|}{|\mathbf{r}|}$



Linjer och plan

Linjen eller planet kan ges på

- ekvationsform/normalform, dvs som lösningsmängden till ett antal ekvationer, och består då av alla punkter som uppfyller ekvationerna

eller som

- parameterform dvs som värdemängden till en funktion.

Ekvationer för linjer i $\mathbb{R}^2$

y=kx+m,

eller mer generellt

ax+by=c

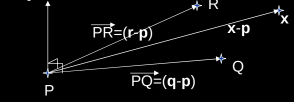
som även beskriver lodräta linjer, men inte är entydigt bestämd av en linje.

Hur hittar du ekvationen givet två punkter på linjen?

Ax+By+Cz=D ekvationer för plan i $\mathbb{R}^3$

Hur hittar jag ekvationen givet tre punkter i planet?

1. Insättning av de tre punkterna ger tre ekvationer i tre obekanta.
2. Beräkna (A,B,C) samt D genom



Om X är en godtycklig punkt i planet gäller **n**·(**x-p**) = **0** ⇒ **n**·**x** = **n**·**p**,

dvs (A,B,C)· (x,y,z)=(A,B,C)· (p_1,p_2,p_3), dvs Ax+By+Cz=Ap_1+Bp_2+Cp_3.

- koefficienterna (A,B,C) utgör normalen **n** (ger planets lutning i rummet)
- konstanten D ges av **n**·**p**. (varierande D ger olika parallella plan)

Ekvationer för linjer och plan i $\mathbb{R}^n$.

En linje $\mathbb{R}^3$ ges av två icke-parallella plan, dvs

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Generalisering

- n (generiska) linjära ekvationer i $\mathbb{R}^n$ skär ut en punkt
- n-1 (generiska) linjära ekvationer i $\mathbb{R}^n$ skär ut en linje
- n-2 (generiska) linjära ekvationer i $\mathbb{R}^n$ skär ett plan

osv

Parametriseringar

En funktion som har linjen eller planet som målmängd,

T ex

- p(x): $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ger ett plan i $\mathbb{R}^3$
- p(x): $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ ger en linje i $\mathbb{R}^4$.

Parametrisering av linje

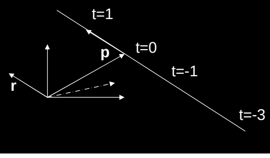
Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$t \to \mathbf{p} + t\mathbf{r}$$

Exempel, parametrisering av linje i rummet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Hur ändras detta om linjen ligger i tex $\mathbb{R}^4$



Kan du gå mellan ekvation och parametrisering?

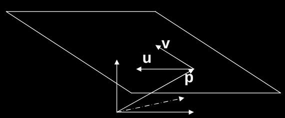
Parametrisering av plan

Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$

$$(s, t) \to \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

Exempel, parametrisering av plan i rummet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \; s, t \in \mathbb{R}^3$$



Annan information som bestämmer ett plan

1. Tre punkter i planet
2. Två vektorer och en punkt i planet ↔ parametrisering
3. Normalvektor och en punkt ↔ ekvation (bara i $\mathbb{R}^3$)
4. ⋮

Span(**u**) och Span(**u**,**v**)

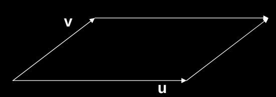
- Span(**u**) = { **x** $\in \mathbb{R}^{\dim(u)}$: **x** = t**u** , t $\in \mathbb{R}$ }

  dvs linjen genom origo som har **u** som riktningsvektor.
- Span(**u**,**v**) = { **x** $\in \mathbb{R}^{\dim(u)}$: **x** = t**u**+s**v**, s,t $\in \mathbb{R}$ }

  dvs en planet genom origo som innehåller vektorerna **u** och **v**.
- Allmänt är Span mängden av alla vektorer som kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna vars spann man söker.

Även annat kan parametriseras: Parametrisering av parallellogram

$$\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, 0 \leq s, t \leq 1$$



Hur parametriserar man en trehörning?