Linjär algebra

Föreläsning 3

GU

2008

Samuel Bengmark

Förra gången

- Skalärprodukt: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
  - Beräkna vinkel
  - Projicera vektor på vektor
- Vektor produkt: $\mathbf{u}\times\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  - Beräkna areor (triangel och parallellogram)
  - Beräkna volymer (Parallellepiped och tetraeder)
- Linjer och plan
  - Parametrisering
  - Ekvationer/normalform

Idag

- Hittills har vi pratat om vektorer, nu glider vi över till matriser.
- Linjära ekvationssystem.
  - Som matrisekvation
  - Totalmatris
  - Radoperationer
  - Gausselimination
  - Bakåtsubstitution
  - Pivotelement
  - Existens och entydighet av lösning.

Exempel 1: Linjärt ekvationsystem

Finns polynomkurva som passerar genom punkterna (-1,0), (2,12) och (1,6).

Ansätter en andragradskurva $y=ax^2+bx+c$ och sätter in.

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 12 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

Räkna på tavlan och rita i Matlab

Ytterligare några exempel

- Exempel 2,3 och 4. Räknar på tavlan …

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x+2y = 5 \end{cases}$$

Unik lösning

$$\begin{cases} x+2y = 25 \\ 3x+6y = 75 \end{cases}$$

Oändligt många lösningar. Utgör en hel linje

$$\begin{cases} x+2y = 2 \\ 3x+6y = 7 \end{cases}$$

Saknar lösning

Allmänt linjärt ekvationssystem

Har formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Har bara 0-te och 1:a-grads termer,dvs termer som är konstant eller konstant gånger variabel.
- Alltså inga högregrads termer, tex inga termer innehållande $x_i \cdot x_j$!

Tre olika sätt att skriva systemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Högerled

Koefficientmatris

Matrisekvation

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Kallas systemets **totalmatris** eller **utökade matris**. En m×(n+1)-matris

Tre metoder att lösa systemet

- Substitutionsmetod
  - Blir oöverskådligt för stora system. Undvik detta!
- Gausselimination och bakåtsubstitution
  - Minst krävande
  - Kan med fördel göras på totalmatrisen !

Vi kommer senare se ytterligare ett sätt som funkar för vissa ekvationssystem nämligen

- Multiplicera med invers till A.
  - Bara aktuellt för kvadratiska koefficientmatriser, som dessutom måste ha invers.
  - Arbetskrävande att finna invers.

Gausselimination

Elementära radoperationer

1. Multiplicera rad med konstant ≠ 0.
2. Addera en rad till en annan.
3. Byta plats på två rader.

Två matriser A, A' som skiljer sig på radoperationer kallas radekvivalenta. Skriver $A \sim A'$.

Sats: Om (A|b) ~ (A'|b') så har de samma lösningsmängd.

Bevis: Endast 2. kräver lite eftertanke, men det är klart då en gemensam lösning till två ekvationer också löser deras summa, och på samma sätt med deras differens.

Gör exempel på tavlan!

Gausseliminationens resultat

p_i kallas pivotelement

Kallas trappformad matris.

Varje kolonn svarar mot en obekant.

$$(A|\mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} p_1 & & & & & & b'_1 \\ 0 & \cdots 0 & p_2 & & & & b'_2 \\ 0 & \cdots & 0 & p_3 & & & b'_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 0 \;\; p_r & \cdots & b'_r \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b'_n \end{array}\right) = (T|\mathbf{b}')$$

$(T|\mathbf{b}')$ har nu samma lösningsmängd som $(A|\mathbf{b})$

Denna finner man genom *bakåtsubstitution*

Bakåtsubstitutionen

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} p_1 & & & & & & b'_1 \\ 0 & \cdots & p_2 & & & & b'_2 \\ 0 & \cdots & 0 & p_3 & & & b'_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 0 \;\; p_r & \cdots & b'_r \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b'_n \end{array}\right)$$

Börja nerifrån

1. Om någon av $b'_{r+1},\cdots,b'_n$ är skild ifrån 0 så saknas lösning.
2. Om $b'_{r+1}=\cdots=b'_n=0$ finns lösning och variablerna som svarar mot kolonner utan pivotelement parametriserar lösningen, dvs lösningsmängden blir (m-r)-dimensionell.

Några exempel på tavlan

Ex 5.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 15z = 11 \end{cases}$$

Ex 6.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = -3 \\ x - 2y - z = a \end{cases}$$

Observationer

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} p_1 & & & & & & & b'_1 \\ 0 & \cdots & p_2 & & & & & b'_2 \\ 0 & \cdots & 0 & p_3 & & & & b'_3 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 0 & p_r & \cdots & b'_r \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & b'_n \end{array}\right)$$

- Har unik lösning omm $b'_{r+1}=\cdots=b'_n=0$ och m=r (dvs har pivotelement i varje kolonn).
- Blir en linje omm $b'_{r+1}=\cdots=b'_n=0$ och m=r+1.
- Blir ett plan om $b'_{r+1}=\cdots=b'_n=0$ och m=r+2.
- Om högerleder **b**=**0** finns alltid lösning.
  – Systemet kallas då ett homogent system.
  – Dess lösningsmängd kallas nollrummet, och betecknas Nul A, dvs $NulA = \{\mathbf{x}; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

Observera

I exempel 6 ovan gavs lösningen som en parametriserad linje i fallet a=-3. Då gällde:

- startpunkten var en lösning till systemet,
- riktningsvektorn var en lösning till systemet då högerledet var noll-vektorn.

Minns från första föreläsningen: matrismultiplikation - matris och vektor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} z\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix}$$

Linearitet

En viktig observation

- A(s**x**)=sA**x**
- A(**x**+**y**)=A**x**+A**y**

dvs

- A(s**x**+t**y**)=sA**x**+tA**y**

Lösning = partikulär + homogen

- Har man en enda lösning, en så kallad partikulärlösning $\mathbf{x}_p$ till A**x**=**b**
- och dessutom beräknar alla lösningar $\mathbf{x}_h$ till det homogena systemet A**x**=**0**
- så får man samtliga lösningar till A**x**=**b** genom att addera dessa dvs

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h.$$