Gruppuppgift 2

1. Reella vektorrum

1.1. Inledning

I Baskursens *Övning 6* studerade ni olika talmängder, t.ex. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$. Många av egenskaper var gemensamma. Genom att abstrahera dessa gemensamma egenskaper leddes ni till definitionen av *grupp, ring* och *kropp*, och att studera vilka egenskaper de har. Dessa abstrakta resultat kunde sedan användas för att få konkreta resultat för t.ex. de reella talen. Här skall vi göra på liknande sätt för vektorer.

Exempel 1. I *Vektoralgebra* har vi definierat geometriska vektorer i planet och i rummet, och sett vilka räkneregler de uppfyller. Observera att vi har två typer av operationer på geometriska vektorer, addition och multiplikation med ett reellt tal. $\square$

Exempel 2. $\mathbb{R}^n$ består av alla n-tipler $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ där x_i är reella tal. På $\mathbb{R}^n$ inför vi två operationer, addition och multiplikation med ett reellt tal genom

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

och

$$t\mathbf{x} = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\ .$$

$\square$

1.2. Definition av vektorrum

Definition 1.1. *Ett reellt vektorrum V är en icke-tom mängd vars element kallas vektorer. På V har vi två operationer, addition av vektorer och multiplikation av en vektor med en skalär. Addition är en binär operator på V, dvs. till två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är summan $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$ definierad. Till varje reellt tal t och varje vektor $\mathbf{v}$ är en vektor $t\mathbf{v} \in V$ definierad. Dessa operationer skall uppfylla följande axiom.*

I. *V är en abelsk grupp under addition, dvs.*

(1.1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(1.2) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
(1.3) *Det finns ett element $\mathbf{0} \in V$ så att*
$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
(1.4) *Det finns ett element $-\mathbf{v} \in V$ så att*
$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

II. *Samband mellan addition och multiplikation med skalärer.*

(2.1) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$
(2.2) $(s + t)\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$
(2.3) $s(t\mathbf{v}) = (st)\mathbf{v}$
(2.4) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

$\square$

(1.1) – (2.4) skall gälla för alla $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i V och alla tal s och t i $\mathbb{R}$. Elementen i vektorrummet kallas alltså för vektorer. För att skilja dem från $\mathbb{R}$ kallas de reella talen i samband med vektorrum ofta för skalärer.

Observera att det förekommer två slags addition i dessa axiom. T.ex. i axiom (2.2) är additionen till vänster den vanliga additionen mellan reella tal, men till höger är det additionen mellan vektorer i V.

I stället för *reellt vektorrum* säger man i bland *vektorrum över* $\mathbb{R}$. Det är möjligt att byta ut $\mathbb{R}$ mot $\mathbb{C}$ och man talar då om ett *komplext vektorrum* eller ett *vektorrum över* $\mathbb{C}$. Man kan generalisera ytterligare och studera vektorrum över en godtycklig kropp K. I resten av den här stencilen är alla vektorrum reella och vi säger helt enkelt *vektorrum*.

Övning 1.1. Övertyga dig om att följande sats gäller.

Sats 1. I ett vektorrum gäller

(1) Om $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ så är $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
(2) $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$
(3) Ekvationen $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ har en entydig lösning.
(4) $-(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (-\mathbf{u}) + (-\mathbf{v})$

Bevis. V är en abelsk grupp.
(Beviset är en triumf för det abstrakta begreppet grupp!) $\blacksquare$

På grund av (1) är det negativa elementet $-\mathbf{v}$ entydigt bestämt och vi kan definiera subtraktion av vektorer genom $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Övning 1.2. Visa att i ett vektorrum gäller

(1) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
(2) $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$
(3) $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$
(4) $t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = t\mathbf{u} - t\mathbf{v}$
(5) Om $t\mathbf{v} = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eller $t = 0$.

1.3. Exempel på vektorrum

Övning 1.3. Övertyga dig om att geometriska vektorer och $\mathbb{R}^n$ (se Exempel 1 och 2) är vektorrum.

Exempel 3. Mängden av alla polynom med reella koefficienter är ett vektorrum.

Exempel 4. Mängden av alla reella polynom av grad högst n är ett vektorrum.

Exempel 5. Mängden av alla kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 1]$ är ett vektorrum.

Övning 1.4. Visa påståendena i Exempel 3-5.

I Exempel 3-5 har vi nått en ny abstraktionsnivå genom att tänka på olika typer av funktioner som element i ett vektorrum. Genom att använda resultat från linjär algebra på sådana funktionsrum kan man bevisa resultat i analys. Denna viktiga gren av matematiken kallas för *funktionalanalys*.

1.4. Delrum

Betrakta en icketom delmängd W till ett vektorrum V.

Övning 1.5. Vad krävs för att W skall vara ett vektorrum? Försök formulera en sats med så få villkor som möjligt på W som garanterar att W blir ett vektorrum.

Definition 1.2. *Om W är ett vektorrum med $W \subset V$ kallas W för ett* delrum *till V.*

Övning 1.6. Beskriv något icke-trivialt (dvs. $W \neq \{\mathbf{0}\}$ och $W \neq V$) delrum till vektorrummen i Exempel 1-5.

2. Uppgifter på vektorprodukt

V 5: 3, 4, 6, 8, 9

3. Linjer och plan

V 6: 4, 6, 7, 9, 10, 11, 16, 17, 22, 25, 17, 29, 30