Gruppuppgift 3

I denna övning skall ni undersöka begreppen egenvektorer och egenvärden m.m. och visa hur de kan användas för att lösa system av diferentialekvationer. Vi behandlar bara det enkla tvådimensionella fallet.

1. Egenvärden, egenvektorer och system av linjära ordinära differentialekvationer

Låt a, b, c, d vara reella tal. Betrakta det *linjära differentialekvationssystemet*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & a\,x(t) + b\,y(t), \\ y'(t) & = & c\,x(t) + d\,y(t). \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Om $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är systemets koefficientmatris, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ kan differentialekvationen skrivas

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Sats 1.1. *Om*

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

så gäller att

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & u_1\,e^{\lambda\,t} \\ y(t) & = & u_2\,e^{\lambda\,t} \end{array} \right. \tag{1.2}$$

är en lösning till (1.1)*.*

Övning 1.1. Bevisa att (1.2) verkligen är en lösning till (1.1).

I samband med differentialekvationssystemet (1.1) och i många andra viktiga situationer uppstår problemet att bestämma egenvärdena och egenvektorerna till en matris, där

Definition 1.2. *Talet* λ *är ett* egenvärde *till* $n \times n$ *matrisen* A *om och endast om det finns en vektor* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *sådan att* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *och*

$$A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \tag{1.3}$$

Varje vektor $\mathbf{u}$ *som uppfyller* (1.3) *kallas för en egenvektor till* A *med* egenvärdet λ.

Med denna definition kan vi formulera om Sats 1.1.

Sats 1.1. *Om* $\mathbf{u}$ *är en egenvektor till* A *med egenvärdet* λ *så är* $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$ *en lösning till differentialekvationen* $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$*.*

Vi skall nu undersöka hur man kan beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen A.

Sats 1.4. *Ekvationssystemet*

$$\begin{cases} ax + by &= 0, \\ cx + dy &= 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

har en lösning $(x, y) \neq (0, 0)$ *om och endast om*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0.$$

Övning 1.2. Bevisa Sats 1.4.

Följdsats 1.5. *Talet* λ *är ett egenvärde till matrisen* A *om och endast om*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5}$$

Övning 1.3. Bevisa Följdsats 1.5.

Övning 1.4. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Övning 1.5. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Övning 1.6. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Övning 1.7. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ där $0 < \phi < \pi$.

I Övning 6 och 7 blir egenvärdena komplexa tal och egenvektorerna får komplexa komponenter.

I tillämpningar är man oftast inte intresserad av att bestämma alla lösningar till differentialekvationssystemet (1.1) utan man vill beräkna lösningen till ett *begynnelsevärdesproblem.* Dvs. en tidpunkt t_0 (oftast är $t_0 = 0$) och en vektor (x_0, y_0) är givna och man vill bestämma den lösning $(x(t), y(t))$ till (1.1) som uppfyller *begynnelsevillkoret*

$$x(t_0) = x_0 \text{ och } y(t_0) = y_0. \tag{1.6}$$

Har man redan bestämmt två lösningar $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ och $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ till (1.1) så att vektorerna $(\hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0))$ och $(\tilde{x}(t_0), \tilde{y}(t_0))$ är linjärt oberoende så är det enkelt att beräkna lösningen $(x(t), y(t))$ till begynnelsvärdesproblemet (1.1) och (1.6). Vi har nämligen följande sats.

Sats 1.6. *Låt* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ *och* $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ *vara lösningar till differentialekvationssystemet* (1.1) *och* c_1 *och* c_2 *godtyckliga tal. Då är även*

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

en lösning till (1.1)*.*

Övning 1.8. Bevisa Sats 1.6.

Om ni nu helt enkelt bestämmer c_1 och c_2 från ekvationssystemet

$$c_1(\hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) + c_2(\tilde{x}(t_0), \tilde{y}(t_0)) = (x_0, y_0),$$

så ger (1.7) lösningen till begynnelsevärdesproblemet (1.1) och (1.6).

Övning 1.9. Övertyga dig om att (1.7) ger lösningen till begynnelsevärdesproblemet.

Övning 1.10. Betrakta differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x'(t) &= -3x(t) &+ 6y(t) \\ y'(t) &= 6x(t) &- 3y(t) \end{cases}$$

Bestäm den lösningen till systemet som uppfyller begynnelsevillkoret $x(0) = 5$, $y(0) = 7$.

Övning 1.11. Visa att $x(t)$ är en lösning till

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t)$$

om och endast om $(x(t), y(t))$ är en lösning till

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -bx(t) - ay(t) + g(t). \end{cases}$$

Övning 1.12. Lös begynnelseproblemet $x''(t) = x(t),\ x(0) = 1, x'(0) = 0.$

2. Förslag till svar

4. -1 & $c(-1, 1)$ och 9 & $c(1, 1)$
5. 3 & $c(1, -1)$
6. $3i$ & $c(1, i)$ och $-3i$ & $c(1, -i)$
7. $e^{i\phi}$ & $c(1, i)$ och $e^{-i\phi}$ & $c(1, -i)$.
10. $x(t) = 6e^{3t} - e^{-9t}$ och $y(t) = 6e^{3t} + e^{-9t}$.
12. $x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$