Gruppuppgift 5

1. Bas och dimension

Vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ är en bas för vektorrummet V om

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende

och

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ spänner V.

Övning 1.1. Visa att om $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ är en bas för V så kan varje vektor $\mathbf{v}$ i V entydigt skrivas

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n .$$

Det viktigaste resultatet är att antalet vektorer i en bas för V inte beror på valet av bas.

Sats 1.1. (Dimensionssatsen) *Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ och $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_m$ är baser för vektorrummet ett delrum H till $\mathbb{R}^d$. Då gäller $n = m$.*

Övning 1.2. Försök fylla i detaljerna i följande bevisskiss.

Bevis. (Skiss.)
Antag att $m > n$.
Låt $V = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_n)$ och $U = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \dots\ \mathbf{u}_m)$.
Det finns tal x_{ij} så att $\mathbf{u}_i = x_{i1}\mathbf{v}_1 + x_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + x_{in}\mathbf{v}_n$.
Låt $C = (x_{ij})^T$.
Hur många rader och kolonner har C?
Så vad gäller för ekvationen $C\mathbf{y} = \mathbf{0}$?
Vad är VC?
Så vad blir $U\mathbf{y}$?
Slutsats? ∎

Övning 1.3.

L 2.8: 11, 17, 23, 25

Övning 1.4. Låt $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1, 0)$ och $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 0, 0)$.
(a) Visa att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är linjärt oberoende.
(b) Utvidga $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ till en bas för $\mathbb{R}^4$.
(c) Vad blir koordinaterna i denna bas för vektorn (som i standardbasen har koordinaterna) $(1, 1, 1, 1)$?

I Gruppövning 2 visade ni (eller hur?) att $\mathbb{P}_3$, polynomen av grad högst 3, är ett vektorrum.

Övning 1.5. (a) Ange en bas för $\mathbb{P}_3$.
(b) Vad har $\mathbb{P}_3$ för dimension?

Övning 1.6. **L** 2.9: 9, 11, 17, 18

2. Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$

I *Vektoralgebra* definierade vi skalärprodukten mellan två vektorer genom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$, där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, och bevisade att i en ortonormerad bas så gäller (i $\mathbb{R}^3$) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Nu skall vi vända på detta genom följande definition.

Definition 2.1. *Om* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *så definieras deras* skalärprodukt *genom*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \ .$$

Vi säger att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är *ortogonala* (vinkelräta) om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, *längden* av $\mathbf{u}$ definieras genom $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$ och *vinkeln* θ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ genom

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \ .$$

Den sista definitionen är möjlig på grund av Cauchy-Schwartz olikhet.

Sats 2.2.

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \ .$$

Vi har också

Sats 2.3. (Pythagoras sats) *Om* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är ortogonala så gäller*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \ .$$

Övning 2.1. Bevisa de vanliga räknereglerna för skalärprodukt. (Se sidan 18 i *Vektoralgebra.*)

Övning 2.2. Bevisa Pythagoras sats.

Övning 2.3. Bevisa Cauchy-Schwartz olikhet.
Ledning. Precis som i $\mathbb{R}^3$, se *Vektoralgebra* sid. 22, gäller att om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så kan varje vektor $\mathbf{v}$ skrivas $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$ där $\mathbf{v_u}$ är parallell med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v_u^\perp}$är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Så $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v_u}|$. Men enligt Pythagoras sats är (Varför då?) $|\mathbf{v_u}| \leq |\mathbf{v}|$.

3. Uppgifter på ortogonal projektion

L 6.3: 3, 7, 9
L 6.4: 1,9

4. Uppgifter på minstakvadratmetoden

L 6.5: 1, 3, 7, 9, 11, 17
L 6.6: 1, 3, 9