Gruppuppgift 6

1. Egenvärden och egenvektorer

I Gruppuppgift 3 såg vi hur determinanter, egenvärden och egenvektorer kunde användas för att lösa system av första ordningens linjära ekvationssystem med två obekanta funktioner.

Nu skall vi studera hur detta fungerar när vi har fler obekanta funktioner. Vi kan nu inte ”bara räkna på”, kakylerna blir allt för komplicerade.

Vi påminner om

Definition 1.1. *Låt A vara en matris med n rader och n kolonner. Talet λ är ett* egenvärde *till A om det finns en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ sådan att $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och*

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \tag{1.1}$$

Varje vektor $\mathbf{u}$ som uppfyller (1.1) *kallas för en* egenvektor *till A med egenvärdet λ.*

Följande sats är fundamental.

Sats 1.2. *Varje matris A har en komplex egenvektor.*

Övning 1.1. Försök fylla i detaljerna i följande bevis

Bevis. (Skiss.)
1. Tag en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$.
2. Det finns $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{c} \neq 0$ så att $c_0\mathbf{v} + c_1A\mathbf{v} + c_2A^2\mathbf{v} + \ldots + c_nA^n\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
3. Låt $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$.
4. Låt m vara det största tal med $c_m \neq 0$. Genom division med c_m kan vi anta att $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + x^m = (x - \lambda_m)(x - \lambda_{m-1}) \ldots (x - \lambda_1)$ där $\lambda_i \in \mathbb{C}^n$.
5. Detta ger $(A - \lambda_mI)(A - \lambda_{m-1}I) \ldots (A - \lambda_1I)\mathbf{v} = 0$
6. För något k är därför $u_k = (A - \lambda_kI)(A - \lambda_{k-1}I) \ldots (A - \lambda_1I)\mathbf{v}$ en egenvektor med egenvärdet λ_{k+1}. ∎

Ett annat bevis (det som ges i boken) bygger på att ekvationen $(A - \lambda I)\mathbf{u} = 0$ har en icke-trivial lösning om $\det(A - \lambda I) = 0$. Detta är en ekvation av grad n och har alltså en rot λ. Sedan löser vi ekvationen $(A - \lambda I)\mathbf{u} = 0$ för att bestämma motsvarande egenvektor. För att kunna genomföra detta behöver vi kunna beräkna determinanter.

2. Determinanter

Övning 2.1. **L** 3.1: 3, 7, 9

Övning 2.2. **L** 3.2: 5, 11, 21

3. Egenvärden (forts.)

Övning 3.1. Ł 5.1: 1, 5 ,17, 19, 21, 31

Övning 3.2. L 5.2: 3, 11

4. Dynamiska system

Betrakta följande befolkningsomflyttningsproblem. I ett storstadsområde bor en miljon innevånare, 400 000 i innerstaden och 400 000 i förorterna. Varje år flyttar 5% från innerstaden till förorten och 3% från förorten till centrum. En modell för detta ges av det dynamiska systemet, (Varför då?)

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{n+1} = A\mathbf{b}_n \ , n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{b}_0 = (600\,000, 400\,000) \end{cases}$$

där A är matrisen $A = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}_n$ anger befolkningsfördelningen efter n år.

Övning 4.1. Visa att $\mathbf{u} = (3, 5)$ och $\mathbf{v} = (1, -1)$ är egenvektorer till A. Vad är egenvärdena?

Övning 4.2. Beräkna $A^n\mathbf{u}$ och $A^n\mathbf{v}$.

Övning 4.3. Vad är koordinaterna för $\mathbf{b}_0$ i basen $\mathbf{u}, \mathbf{v}$?

Övning 4.4. Hur ser befolkningsfördelningen ut efter n år? Vad händer då $n \to \infty$?

Övning 4.5. **L** 5.2: 25,

Övning 4.6. **L** 5.6: 1, 3

5. System av differentialekvationer

Låt $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ vara n deriverbara funktioner och $\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ deras derivator. Vi vill lösa differentialekvationerna $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ där A är en $n \times n$-matris. Den skalära ekvationen $x'(t) = ax(t)$ har lösningen $x(t) = Ce^{at}$. Vi prövar därför om det finns en lösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ av formen $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$ för någon vektor $\mathbf{u}$. Vi ser att $\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{u}$ och $A\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}A\mathbf{u}$. Så differentialekvationen är uppfylld om $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, dvs. om $\mathbf{u}$ är en egenvektor till A.

Övning 5.1. Visa att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer till A med egenvärdena λ_1 respektive λ_2 så är $\mathbf{x}(t) = ae^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + be^{\lambda_2 t}\mathbf{v}$ också en lösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Generalisera till n egenvektorer.

Övning 5.2. **L** 5.7: 1

Övning 5.3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $x(0) = (3, 2)$ då A är matrisen

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{(b)} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Diagonalisering

Övning 6.1. **L** 5.3: 1, 5, 7, 11, 17

7. Symmetriska matriser

En matris är symmetrisk om $A^T = A$. För dessa matriser förenklas beräkningarna på grund av följande

Sats 7.1. *Alla egenvärden till en symmetrisk matris är reella, och $\mathbb{R}^n$ har en bas av ortonormerade egenvektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ till A.*

Om vi låter $Q = (\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n)$ så gäller $A = QDQ^{-1}$ där D är diagonalmatrisen med motsvarande egenvärden. Men $Q^{-1} = Q^T$ och vi slipper alltså beräkna Q^{-1}.

Övning 7.1. Visa att $Q^{-1} = Q^T$.

Övning 7.2. **L** 7.1: 1, 3, 5, 13, 15, 17