

l'Hospitals regel, Taylors formel m.m.

Sats 1.1. (l'Hospitals regel) Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på $[-a, 0) \cup (0, a]$ för något $a > 0$, och att $g'(x) \neq 0$ om $x \neq 0$. Antag vidare att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ och att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar. Då gäller

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

I boken bevisas detta under extra antagande på regulariteten hos f och g och att $g'(0) \neq 0$. För att bevisa Sats 1 behöver vi en starkare form av medelvärdessatsen.

Sats 1.2. (Den generaliserade medelvärdessatsen) Antag att f och g är kontinuerliga i det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbara i det öppna intervallet (a, b) . Då finns en punkt $a < \xi < b$ så att

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) .$$

När $g(x) = x$ är detta den vanliga medelvärdessatsen.

Om $g(b) - g(a) \neq 0$ och $g'(\xi) \neq 0$ kan detta skrivas

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Den vanliga medelvärdessatsen ger $f(b) - f(a) = f'(\xi_1)(b - a)$ och $g(b) - g(a) = g'(\xi_2)(b - a)$. Så

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1)(b - a)}{g'(\xi_2)(b - a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

Det är *inte* självklart att man kan välja $\xi_1 = \xi_2$, det är precis detta som den generaliserade medelvärdessatsen garanterar.

Bevis av den generaliserade medelvärdesatsen. Beviset är snarlikt beviset av medelvärdesatsen. Vi bildar hjälpfunktionen

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) .$$

Då är h kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Dessutom gäller $h(a) = h(b) = 0$ så Rolles sats ger att $h'(\xi) = 0$ för något $a < \xi < b$. Men $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$ och saken är klar. ■

Bevis av l'Hospitals regel. Börja med att definiera (eller definiera om) $f(0) = g(0) = 0$. Då uppfyller f och g villkoren i den generaliserade medelvärdesatsen och alltså gäller

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

■

l'Hospitals regel gäller förstås också då $x \rightarrow a$, $x \in \mathbb{R}$. Det finns också en version av l'Hospitals regel då $x \rightarrow \infty$ (och $x \rightarrow -\infty$).

Sats 1.3. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på $[N, \infty)$ för något N , och att $g'(x) \neq 0$ om $x > N$. Antag vidare att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ och att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar. Då gäller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Tag ω så stort att $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \epsilon$ då $x \geq \omega$. Fixera $y > \omega$ och tag $x > y$. Då ger den generaliserade medelvärdesatsen att

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \epsilon$$

eftersom $\xi > \omega$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ger detta att

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - A \right| \leq \epsilon$$

då $y > \omega$ dvs. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{g(y)} = A$ och beviset är klart. ■

l'Hospitals regel gäller också då $\lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$. Formuleringen och beviset av detta lämnas åt den intresserade läsaren.

Exempel 1.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos 2x}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin 2x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos 2x}{\cos x} = 6.\end{aligned}$$

En enklare lösning (Eller hur?) är med Taylors formel.

Vi har $\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$, $x \rightarrow 0$ och $\sin 2x = 2x - \frac{8}{3}x^3 + O(x^4)$, $x \rightarrow 0$.

Så

$$\begin{aligned}\frac{2 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x} &= \frac{2x - \frac{2}{3}x^3 - 2x + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4)}{\frac{1}{3}x^3 + O(x^4)} \\ &= \frac{2x^3 + O(x^4)}{\frac{1}{3}x^3 + O(x^4)} = \frac{2 + O(x)}{\frac{1}{3} + O(x)} \rightarrow 6, x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

□

Vad är det för fel i följande (mot)exempel?

Motexempel 1.2 Gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$$

existerar inte.

□

Motexempel 1.3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x \sin x}{e^{\sin x} (x + \cos x \sin x)} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x (x + \cos x \sin x + 2 \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cos x}{e^{\sin x} (x + \cos x \sin x + 2 \cos x)} = 0.\end{aligned}$$

□

Ett alternativt bevis av Taylors formel

Låt $P_2(x)$ vara Taylorpolynomet till f av ordning två. Genom upprepad användning av den generaliserade medelvärdesatsen får vi att

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - P_2(x)}{\frac{1}{6}x^3} &= \frac{f(x) - f(0) - xf'(0) - \frac{1}{2}x^2 f''(0)}{\frac{1}{6}x^3} \\ &= \frac{f'(\xi_1) - f'(0) - \xi_1 f''(0)}{\frac{1}{2}\xi_1^2} = \frac{f''(\xi_2) - f''(0)}{\xi_2} = f'''(\xi)\end{aligned}$$

och beviset är klart då $n = 2$. I det allmänna fallet betraktar vi istället

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}.$$