Tentamensskrivning i Matematik 1, MMG200, Inledande algebra
Datum: 2008-10-25 kl 8.30-13.30
MATEMATIK Hjälpmedel: Inga
Göteborgs Universitet Telefonvakt: Adam Wojciechowski, 076-272 18 61

---

1. a) Låt a vara ett heltal och definiera begreppet *delare till a*.

   b) Definiera begreppet *största gemensamma delare till a och b*, SGD(a,b), för godtyckliga heltal a och b.

   c) Beskriv Euklides algoritm genom att beräkna SGD(1411,646). Bestäm också heltal x och y sådana att $x1411 + y646 = \text{SGD}(1411, 646)$. (3p)

2. a) Ge både en algebraisk och en kombinatorisk tolkning av uttrycket $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

   b) Formulera och bevisa Binomialsatsen. (3p)

3. a) Definiera begreppen *ekvivalensrelation* och *ekvivalensklass*.

   b) Låt relationen $\mathcal{R}$ vara definierad på mängden $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ genom

$$a\mathcal{R}b \;\Leftrightarrow\; \text{det finns något heltal } n \text{ sådant att } \frac{b}{a} = 3^n$$

   Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna (så konkret som möjligt!). (4p)

4. a) Ge exempel på en funktion f med $D_f = \{a, b, c, d\}$ och $V_f = \{0, -18, 2002\}$.

   b) Ge exempel på en funktion g med $D_g = [-1, 1]$ och $V_g =]0, 1[$.

   c) Ge exempel på en funktion h med $D_h = [-1, 1]$ och $V_h = \mathbb{R}$.

   Rita figurer! (3p)

5. Hur många korrekta svar (dvs exempel på funktioner) finns det till uppgift 4a? Tänk efter noga - det är lätt hänt att man räknar samma funktion flera gånger, eller missar någon. Lös ev först det enklare fallet med 3 element i D_f och 2 element i V_f. Motivera ordentligt! (3p)

6. Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{2n} (k+1)2^{k-1} = n\,2^{2n+1}$$

   för $n = 1, 2, 3, \ldots$. (3p)

7. Låt $\langle M, +, \cdot \rangle$ vara en kropp. Då kan operationen division definieras genom

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \text{ för alla } a, b \in M,\ \ b \neq 0.$$

Visa att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

för $a, b \neq 0$. Använd bara ett av kroppsaxiomen i taget, och ange i varje steg vilket axiom som används. (3p)

8. Visa att om $x^2 + y^2 = z^2$ där x, y, z är positiva heltal, så finns bland dessa tal ett som är delbart med 3 och ett som är delbart med 5.

(Det gäller även att ett av talen är delbart med 4, men det behöver du inte visa.) (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 14 november. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.