Tentamensskrivning i Matematik 1, MMG200, Inledande algebra
Datum: 2009-01-10 kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Magnus Goffeng, 076-272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

1. a) Definiera begreppen *delare*, *trivial delare* och *primtal*.

   b) Låt p vara ett primtal. Visa att om p delar ab så gäller att p delar a eller att p delar b. (3p)

2. a) Definiera begreppen *funktion, injektiv funktion* och *surjektiv funktion*.

   b) Ge exempel på, och rita grafen till, en funktion med definitionsmängd $\mathbb{Z}$ och målmängd $\mathbb{N}$ som är

      i. surjektiv men inte injektiv
      ii. både injektiv och surjektiv
      iii. injektiv men inte surjektiv

   Även om du i något av fallen inte kan ge ett uttryck för någon funktion, så försök ändå rita en graf över hur en sådan funktion skulle kunna se ut. (4p)

3. Låt M vara en mängd med operationerna addition och multiplikation definierade.

   a) Formulera kroppsaxiomen för M.

   b) Visa att i en godtycklig kropp gäller

   $$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ eller } b = 0.$$

   Använd bara ett kroppsaxiom i taget och ange vilket axiom som används i varje steg. (3p)

4. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ som definieras genom att

   $$x\mathcal{R}y \text{ om och endast om } xy > 0.$$

   a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna. Hur många (olika) ekvivalensklasser finns det?

   b) Vad händer om man betraktar $\mathcal{R}$ som en relation på hela $\mathbb{Z}$? (3p)

5. Hur många “ord” (dvs bokstavspermutationer) med fem bokstäver kan man bilda av bokstäverna i ordet KRULLIG? (3p)

6. Låt $a_1 = \sqrt{3}$ och $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa med induktion att talföljden $(a_n)_1^\infty$ är växande (dvs $a_{n+1} \geq a_n$ för alla n) och uppåt begränsad. (3p)

7. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. (3p)

8. Visa att för alla heltal a och b gäller $(a + b)^{41} \equiv a^{41} + b^{41} (\text{mod } 41)$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 30 januari. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.