

MAM100, ENVARIABELANALYS: LABORATION 1

Numerisk ekvationslösning

Laborationens syfte: Att utforska och tänka om rekursion, konvergens, numerisk lösning och feluppskattningar. Att använda Newton-Raphsons metod i ett Matlab-program.

Viktiga begrepp och frågor:

- Vad är en talföljd ?
- Vad är en numerisk lösning ?
- Vilka delar har en numerisk lösning ?
- Vad betyder det att en talföljd konvergerar ?
- Fixpunktsiteration
- Newton-Raphsons metod
- Absolut fel
- Feltolerans

Problembeskrivning:

I den här uppgiften skall vi titta på ekvationerna

(i) $F(x) = x$

(ii) $f(x) = 0$

Med $f(x) = F(x) - x$ ser vi att det är enkelt att gå från den ena formen till den andra.

(Det finns flera olika sätt att överföra en ekvation från den ena typen till den andra.)

Lösningen till (i) ges grafiskt av skärningen mellan linjen $y = x$ och kurvan $y = F(x)$ och lösningen till (ii) erhålls ju från skärningen mellan x-axeln och kurvan $y = f(x)$.

Övning 1: Ekvationen $F(x) = x$, fixpunktsiteration och felanalys.

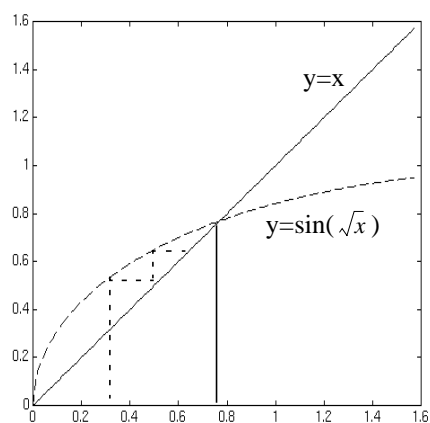
Lös ekvationen $\sin(\sqrt{x}) = x$, ($x > 0$) med fixpunktsiteration:

- Ange en rekursivt definierad talföljd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ som du tror konvergerar mot en rot.
- Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värde att det finns en rot i intervallet $0,25 \leq x \leq 1$.
- Hur kan vi veta att talföljden konvergerar mot en rot α om startvärdet är $x_0 = 0,25$?
- Beräkna de fem första approximationerna (i Matlab eller med räknare).

En viktig del av varje numerisk metod är **feluppskattningar**. Sådana kan bl.a. utnyttjas till att ge instruktioner för när beräkningar av nya iterat skall avbrytas. Helst önskar man kunna ge ett kriterium som garanterar att det absoluta felet,

$|x_n - \alpha|$, understiger en given feltolerans.

- Läs igenom sats 4 i kursbokens avsnitt 4.5 och försök tillämpa den för att få en uppfattning om en felgräns för det absoluta felet $|x_5 - \alpha|$. Observera att funktionen i det här fallet är $f(x) = \sin(\sqrt{x}) - x$.

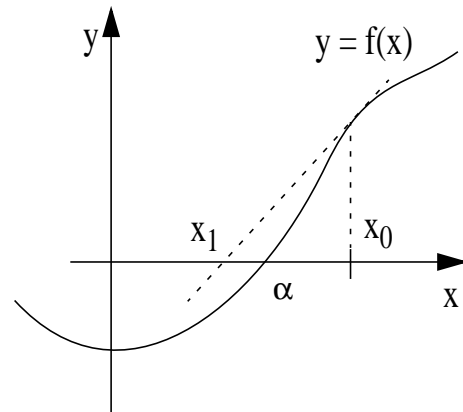


Var god vänd!

Övning 2: Ekvationen $f(x) = 0$,

Newton-Raphsons metod.

En ofta använd numerisk metod för att lösa ekvationer av formen $f(x) = 0$ är Newton-Raphsons metod. I denna "gissar" man först ett lämpligt startvärde x_0 varefter man approximerar $y = f(x)$ med tangenten genom $(x_0, f(x_0))$ (se figuren). Tangentens skärning med x-axeln, x_1 , tas sedan som det nya närmevärdet för roten till ekvationen.



- Bestäm tangentens ekvation och bestäm sedan ett uttryck för x_1 .
- Som nästa steg upprepar man proceduren ovan fast med x_0 utbytt mot x_1 och vi kallar det det nya närmevärdet för x_2 . Hur ser formeln för x_2 ut?
- Efter att ha upprepat detta n ggr så erhåller vi ett närmevärde x_n . Hur ser formeln för x_n ut?

Övning 3 : Newton-Raphson med Matlab.

Skriv en funktionsfil "Newton.m" i Matlab som utför iterationer enligt Newton-Raphsons metod. Vid anrop av "Newton" behöver man ange $f(x)$, $f'(x)$, startvärde x_0 och det antal gånger man vill iterera. Skriv ut alla iteraten, så man kan se hur snabb metoden är.

- Använd "Newton" för att lösa ekvationen $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. (Kurvstudium först!)
- Testa programmet på ekvationen i övning 1.
- Lös sedan ekvationen $10xe^{-x} = -1$. Pröva startvärdena $x_0 = 2$, $x_0 = 1$ och $x_0 = 1/2$. Förklara de olika utfallen.

Övning 4: Matlab-kommandon för ekvationslösning.

Undersök Matlab-kommandona *fzero* och *roots*. Testa dem (där det går) på ekvationerna i föregående övningar. Använd också *fzero* och *roots* på ekvationen $x^2 = 0$. Någon skillnad? Varför?