

Envariabelanalys, MMG200: Laboration 2

Numerisk integration

Laborationens syfte är att

Att studera några olika metoder att approximera en integral med en summa.

Att tillverka en funktionsfil i Matlab för dessa metoder.

Att jämföra metoderna genom att testa dem på ett exempel.

Att undersöka Matlabs olika kommandon för integralberäkning.

Bakgrund

Läs om rektangel- och trapetsuppskattningar i Persson-Böiers: *Analys i en variabel*, §7.11. Gå också igenom stencilen Simpsons formel.

Uppgift 1

Skriv tre funktionsfiler, `rekt(f,a,b,n)`, `trap(f,a,b,n)` och `simpson(f,a,b,n)`, som beräknar en integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

med hjälp av rektangelmetoden, trapetsformeln respektive Simpsons formel. Indata skall vara en funktion, integrationsgränser samt antalet delintervall. Ut ska komma integralens approximativa värde. Observera att hela beräkningen med fördel görs utan loopar - arbeta istället med vektorer.

Uppgift 2

En enkel integral

(a) Beräkna integralen $\int_0^1 xe^x dx$ exakt.

Beräkna integralen numeriskt med hjälp av

(b) Riemannsummor (dvs. rektangelmetoden),

(c) trapetsmetoden,

och (d) Simpsons formel.

Testa med olika n (antal delintervall). Jämför med det exakta värdet. Hur stort behöver n vara för att felet skall bli litet i de olika metoderna?

Uppgift 3

En svår integral

Man kan visa att $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

I förra uppgiften såg du (eller hur?) att Simpsons formel var bäst av de tre metoderna.

(a) Försök att beräkna $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ genom att använda Simpsons formel på $\int_0^N \frac{\sin x}{x} dx$ för lämpligt N .

Varning. Du kan få problem ”nära 0”.

Verktyg för integralberäkning i Matlab

Undersök Matlabs kommandon för integralberäkning.

Kommandot `quadl` utnyttjar en avancerad integralapproximation med adaptiv intervallindelning, dvs intervalllängden görs extra liten där integranden är besvärlig (t ex varierar mycket). Den närbesläktade och något enklare `quad` använder Simpsons formel med adaptiv intervallindelning.

(b) Hur fungerar dessa Matlabs kommandon på den svåra integralen?

Uppgift 4

För att kunna beräkna $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ med större noggrannhet (Det gick väl inte så bra i Uppgift 3?) kan man skriva om den så att integranden går snabbare mot noll då $x \rightarrow \infty$.

Skriv $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ och partialintegrera i den andra integralen.

(c) Hur fungerar de olika metoderna efter denna omskrivning?

1. Redovisning

Uppgift 1. Matlabprogram för trapetsmetoden.

Uppgift 2. Storleken på n för att felet är högst 10^{-3} samt storleken på felet då $n = 10^3$.

Uppgift 3. (a) Vilket N valde du och vilket värde fick integralen.

Uppgift 4. Vilket var den bästa approximationen du fick fram? Med vilken metod?