

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Lördag den 16 januari 2010, 8.30-13.30

- (i) Ge definitionen av att $f(x) \rightarrow A$ när $x \rightarrow a$.
(ii) Ge definitionen av att $f(x) \rightarrow A$ när $x \rightarrow \infty$.
(iii) Visa att om $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow a$ och $g(x)$ är begränsad så $f(x)g(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow a$.

(4p)

- Antag att $f(x)$ är definierad på ett intervall och att a är en inre punkt i detta intervall. Visa att om $f(x)$ har ett lokalt maximum i a och $f'(a)$ existerar så är $f'(a) = 0$.
- Formulera medelvärdessatsen och bevisa den i fallet då $f(a) = f(b) = 0$.
- Bestäm integralen

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4} dx.$$

- Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x}.$$

- Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}.$$

- Antag att $-1 < a < 1$. Visa att

$$f(z) = z^3 + 3az^2 + 3z - 1$$

har två icke-reella nollställen.

- En förnöjd örn svävar 300 meter ovanför markytan med konstant fart 10 m/s. En fågelskådare på marken följer intresserat örnen med blicken. Hur fort ändrar sig avståndet mellan fågelskådaren och örnen när den befinner sig (fågelvägen) 500 meter från fågelskådaren?