Lösningar, Envariabel, MMG200

17 januari 2009

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Vi har

$$\frac{\sin^2 x(1-\cos x)}{x^4} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$$
$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \frac{1}{1+\cos x} \to \frac{1}{2}, x \to 0\,.$$

4. Genom att låta $t = x^2$ ser vi att vi skall bestämma största och minsta värdet av $g(t) = te^{-t}$ på $[\frac{1}{4}, 4]$. Nu är $g'(t) = e^{-t}(1-t)$. Så $g' > 0$ på $[\frac{1}{4}, 1)$ och $g' < 0$ på $(1, 4]$. Så det största värdet är $g(1) = \dfrac{1}{e}$.

   Det minsta värdet antas i någon av ändpunkterna. För att avgöra vilket av dessa värden som är minst observerar vi att

$$\frac{g(4)}{g(\frac{1}{4})} = \frac{16}{e^{3\frac{3}{4}}} \le \frac{16}{e^3} \le \frac{16}{2,7^3} \le \frac{16}{19} < 1\ .$$

   Alltså gäller $g(4) < g(\dfrac{1}{4})$ och det minsta värdet är $g(4) = \dfrac{4}{e^4}$.

5. Variabelbytet $t = \arctan x$ ger eftersom $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/2} tdt = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi^2\ .$$

6. Låt $V(t)$ vara hagelkornets volym (i mm^3) efter tiden t (i minuter). Då gäller $V'(t) = kA(t)$ där $A(t)$ är hagelkornets area. Eftersom $V(t) = Vr(t)^3$ och $A(t) = Ar(t)^2$ där $r(t)$ är hagelkornets radie så gäller $A(t) = cV(t)^{2/3}$. (Här är $V = 4\pi/3$ och $A = 4\pi$ enhetsklotets volym resp. area

men värdet på dessa konstanter har ingen betydelse här.) Vi får med $K = ck$ att

$$V' = kcV^{2/3} = KV^{2/3} \ .$$

Detta kan skrivas

$$\frac{dV}{V^{2/3}} = K\ dt \quad \text{och vi får} \quad 3V^{1/3} = \int \frac{dV}{V^{2/3}} = Kt + C$$

eller $V^{1/3} = K_1 t + C_1$. Villkoren $V(0) = 0,1$ och $V(15) = 0,8 = 2^3 \cdot 0,1$ ger

$$C_1 = 0,1^{1/3} \quad \text{och} \quad 15K_1 + C_1 = 2 \cdot 0,1^{1/3} \quad \text{så} \quad K_1 = \frac{0,1^{1/3}}{15} \ .$$

Till sist ger $V(t) = 2,7 = 3^3 \cdot 0,1$ att

$$3 \cdot 0,1^{1/3} = K_1 t + C_1 = 0,1^{1/3} \frac{t}{15} + 0,1^{1/3} \text{ och } t = 15(3-1) = 30 \ .$$

Alltså har volymen ökat till $2,7\text{mm}^3$ efter 30 minuter.

7. Vi har

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\sin x|} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 1 \ ,$$

och

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\sin x|} \geq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = [\arctan x]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ .$$

8. (i) Eftersom $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, gäller

$$\frac{e^{at} - e^{-at}}{t} = a \left(\frac{e^{at} - 1}{at} + \frac{e^{-at} - 1}{-at} \right) \to 2a, t \to 0 \ .$$

Så om vi sätter $f(0) = 2a$ blir f kontinuerlig.

(ii) Integralkalkylens medelvärdessats ger

$$\frac{1}{a} \int_0^1 \frac{e^{at} - e^{-at}}{t} dt = \frac{e^{a\xi} - e^{-a\xi}}{a\xi}$$

där $0 \leq \xi \leq 1$. Så när $a \to 0^+$ gäller $a\xi \to 0$, och enligt (i) (med $a = 1$) får vi

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{e^{at} - e^{-at}}{t} dt = \lim_{a\xi \to 0} \frac{e^{a\xi} - e^{-a\xi}}{a\xi} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - e^{-t}}{t} = 2 \ .$$