

Tentamen i Envariabelanalys

MMG200, 7 april 2010

- (a) Ge definitionen av att en delmängd X av \mathbb{R} är uppåt begränsad.
(b) Vad menas med en majorant till X ?
(c) Ge definitionen av supremum av X .
(d) Bestäm supremum av mängden av x sådana att $x^4 < 4$.
(4p)

2. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdsats.

- (a) Formulera Taylors formel med Lagranges restterm.
(b) Bevisa Taylors formel i en omgivning av $x = 0$ med resttermen på integralform av grad 3.

4. Beräkna

$$\int_0^1 2x \arctan x \, dx .$$

5. Avgör om

$$\frac{\sin x^3(1 - \cos x)}{x^5}$$

har ett gränsvärde då $x \rightarrow 0$ och bestäm i så fall detta.

6. Visa att

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

har ett största värde på $[0, \infty)$ och bestäm detta värde.

7. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \cos x y'(x) - \sin x y(x) = \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

i intervallet $|x| < \frac{\pi}{2}$.

- Antag att $f(x)$ är deriverbar på $]0, 1[$ och kontinuerlig på $[0, 1]$ och att $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$. Antag vidare att $f'(\eta) = 0$ för någon punkt $\eta \in]0, 1[$. Visa att det finns $\xi \in]0, 1[$ sådant att $f'(\xi) > 1$.