MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2010-10-22.

1. (a) Se häftet "Talsystem och restaritmetiker".
   (b) Man kan ta $G = \mathbb{Z}_7$ och operationen addition av klasser modulo 7.

2. (a) Se Vretblad, avsnitt 2.1 och 2.2.
   (b) Se Vretblad, avsnitt 2.4.
   (c) Se Vretblad, avsnitt 2.4.

3. Formeln (a) är sann ty addition är associativ och kommutativ. Formeln (c) är sann tack vare den distributiva lagen.

   De två övriga stämmer inte. Som motexempel kan man t ex sätta $a_i = b_i = 1$ för alla i. För formeln (b) får vi då att vänsterledet är n och högerledet är n^2 vilket förstås bara är lika om $n = 0$ eller $n = 1$. För formeln (d) får vi då att vänsterledet är n och högerledet är n^n vilket bara är lika om $n = 1$.

4. Det kommer antingen att vara två pojkar och tre flickor eller tvärtom och dessa två möjligheter har förstås inga gemensamma utfall. Tre pojkar och två flickor kan väljas på

$$\binom{10}{2}\binom{8}{3} = 45 \cdot 56 = 2520$$

   sätt och två pojkar och tre flickor kan väljas på

$$\binom{10}{3}\binom{8}{2} = 120 \cdot 28 = 3360$$

   sätt så totalt blir det $2520 + 3360 = 5880$ olika möjligheter.

5. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 1$

   Då gäller att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} k \cdot (3k+1) = 1 \cdot 4 = 4 \text{ och } HL = 1(1+1)^2 = 2^2 = 4,$$

   och alltså gäller likheten för $n = 1$.

   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt positivt heltal n. Visa att då gäller det också för $n + 1$, d v s

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot (3k+1) = (n+1)((n+1)+1)^2 = (n+1)(n+2)^2.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot(3k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot(3k+1) + (n+1)(3(n+1)+1) \\
&= n(n+1)^2 + (n+1)(3(n+1)+1) \\
&= (n+1)(n(n+1)+3n+3+1) \\
&= (n+1)(n^2+4n+4) = (n+1)(n+2)^2,
\end{aligned}$$

och alltså gäller likheten också för $n+1$.

Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla positiva heltal.

6. (a) Vi ser direkt att 5 delar 1615 och vi har $1615 = 5\cdot 323$. Testa successivt om primtalen 3, 5, 7, 11, 13 och 17 delar 323. (Vi behöver inte kolla längre eftersom $19^2 = 361 > 323$.). För 17 finner vi att divisionen går jämnt ut och vi får $323 = 17\cdot 19$. Svaret är alltså $1615 = 5\cdot 17\cdot 19$.

   (b) Första kandidaten 1617 kan vi utesluta eftersom siffersumman är 15 och alltså delbar med 3 och därmed är 1617 delbart med 3.

   Nästa kandidat är 1619. Vi behöver testa alla primtal p som uppfyller $p \leq \sqrt{1619} < 41$. Dessa är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 och 37. De tre första utesluter vi omedelbart och sedan får vi successivt

$$\begin{aligned}
1619 &= 7\cdot 231 + 2 \\
1619 &= 11\cdot 147 + 2 \\
1619 &= 13\cdot 124 + 7 \\
1619 &= 17\cdot 95 + 4 \\
1619 &= 19\cdot 85 + 4 \\
1619 &= 23\cdot 70 + 9 \\
1619 &= 29\cdot 55 + 24 \\
1619 &= 31\cdot 52 + 7 \\
1619 &= 37\cdot 43 + 28.
\end{aligned}$$

   Inget av de möjliga primtalen delar 1619 och alltså är detta det efterfrågade primtalet.

7. (a) Följer direkt av att likhet är en ekvivalensrelation.

   (b) $\{2, 11, 20, 101, 110, 200\}$

   (c) Dessa är inte korrekta definitioner. Vi har t ex att $[7] = [16]$ eftersom båda har siffersumman 7. Däremot gäller t ex

$$[7] \oplus [3] = [10] \text{ och } [16] \oplus [3] = [19],$$

   men $[10] \neq [19]$ så 'additionsdefinitionen' beror på representanten. På samma sätt beror 'multiplikationen' på representanten för vi har t ex

$$[7] \otimes [7] = [49] \text{ och } [16] \otimes [7] = [112],$$

   men $[49] \neq [112]$.

8. **Sats:** Ett positivt heltal n kan skrivas som differensen mellan kvadraterna av två heltal om och endast om n är udda eller $4 \mid n$

   Bevis: Låt n vara ett positivt heltal. Om n är differensen mellan kvadraten av två heltal så är

   $$n = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

   för $x, y \in \mathbb{Z}$. Om x och y båda är udda eller båda är jämna, så är både $x+y$ och $x-y$ jämna. Då kommer $4 \mid n$. Om x och y inte är kongruenta modulo 2 så kommer $x+y$ och $x-y$ båda att vara udda så då kommer också n att vara udda. Vi har nu visat att villkoren i satsen är nödvändiga.

   Vi ska visa att de också är tillräckliga genom att ge konkreta exempel på x och y. Antag först att n är udda. Om vi väljer $x = y + 1$ så får vi

   $$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 1 \cdot (2y + 1) = 2y + 1,$$

   så vi kan få *alla* udda tal genom att ta $y = 0, 1, 2, \ldots$ och $x = y + 1$.

   Antag nu att $4 \mid n$. Om vi väljer $x = y + 2$ så får vi

   $$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2 \cdot (2y + 2) = 4(y + 1),$$

   så vi kan få *alla* multipler av 4 genom att ta $y = 0, 1, 2, \ldots$ och $x = y + 2$. Alltså är villkoren i satsen också tillräckliga.