

ÖVNING 3

OM HELTALEN OCH DELBARHET

SYFTET MED DENNA ÖVNING ÄR ATT BEKANTA SIG MED DELBARHETSEGENSKAPER HOS HELTALEN. DE VIKTIGASTE BEGREPPEN ÄR

- DELBARHET OCH DIVISIONSALGORITMEN
- STÖRSTA GEMENSAMMA DELAREN
- EUKLIDES ALGORITM
- PRIMTAL
- ARITMETIKENS FUNDAMENTALSATS

A1 NI KÄNNER SÄKERT TILL DET MATEMATISKA BEGREPPET ATT NÅGOT TAL b DELAR* ETT ANNAT TAL a . VAD BETYDER DET?

DISKUTERA OCH FÖRSÖK FÖRKLARA INNEBÖRDEN! FÖRSÖK ATT GE EN DEFINITION!

TITTA NU I VRETBAD AVSN. 2.1, DÄR HAR NI EN BRA DEFINITION.

GÖR ÖVN. ~~2.1~~, ~~2.2~~, 2.5, 2.6 (*DVS. ATT a ÄR DELBART MED b .)

A2 VISA ATT OM 5 DELAR a OCH b SÅ DELAR 5 OCKSÅ $a+b$. FORMULERA DENNA EGENSKAP FÖR EN GODTYCKLIG DELARE d TILL a OCH b I STÄLLET FÖR 5. BEVISA DITT PÅSTÄENDE!

A3 I FÖRRA UPPGIFTEN HAR DU FORMULERAT OCH BEVISAT (a) I SATS 2.3! ELLER??

BEVISA NU OCKSÅ (b) I SATSEN.

FÖR BEVISEN AV (a) OCH (b) ANVÄNDS INGET ANNAT ÄN DEFINITIONEN AV DELBARHET!

MAN KAN "FÖRSTÅS" VISA (c) PÅ ANALOGT SÄTT, MEN (c) ÄR OCKSÅ EN DIREKT FÖLJD AV (a) OCH (b). VISA ATT (c) FÖLJER AV (a) OCH (b)! ÄR DET SÅ ATT (a) OCH (b) FÖLJER AV (c)?

A4 ÖVERTYGA DIG OM ATT DU FÖRSTÅR INNEBÖRDEN I SATS 2.3, DEN ÄR MYCKET ANVÄNDBAR! GÖR ÖVN. ~~2.5~~, ~~2.6~~, ~~2.8~~

2.11, 2.12, 2.14, 2.16

B1 DIVISIONSALGORITMEN. SATS:

OM a OCH b ÄR HELTAL OCH $b > 0$ SÅ FINNS HELTAL q OCH r SÅDANA ATT

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

BÅDE q (kvoten) OCH r (resten) ÄR ENTYDIGT BESTÄMDA AV a OCH b .

(i) FÖRSÖK VISA ATT q OCH r FINNS

(ii) FÖRSÖK VISA ATT DE ÄR ENTYDIGT BESTÄMDA

B2 I SKOLAN HAR DU LÄRT DIG EN METOD, ALGORITM, FÖR ATT BERÄKNA KVOT OCH REST VID DIVISION a/b . OM DU T.EX. SKA DIVIDERA 134 MED 7 KAN DET SE UT SÅ HÄR:

$$\begin{array}{r} 19 \\ 7 \overline{) 134} \\ \underline{7} \\ 134 \\ \underline{70} \\ 64 \\ \underline{63} \\ 1 \end{array}$$

ELLER

$$\begin{array}{r} 19 \\ \underline{64} \\ 63 \\ \underline{} \\ 1 \end{array}$$

OCH DU DRAR SLUTSATSEN ATT $134 = 19 \cdot 7 + 1$, DVS ATT KVOTEN ÄR 19 OCH RESTEN ÄR 1. TÄNK IGENOM VARFÖR DEN ALGORITM DU LÄRT DIG ÄR RIKTIG!

B3 GÖR ÖVN. 2.14, 2.15, 2.16, 2.28, 2.29, 2.30, 2.32

C1 OM NI (ELLER ETT BARN) HAR n ST SMÅKUBER OCH FÖRSÖKER LÄGGA OLIKA REKTANGLAR, HUR MÅNGA OCH VILKA BLIR DET OM $n = 12, 13, 60, 61, 64$?

EX
12 ST



FÖR VISSA TYPER AV TAL BLIR ANTALET MYCKET LITET. VILKA TAL ÄR DET? GE EN

BESKRIVNING AV DESSA TAL! GE EN DEFINITION! TITTA I VRETBLAD AVSN. 2.2.

GÖR ÖVN. 2.1, 2.10, 2.11

2.17, 2.18, 2.19, 2.23

C2 VILKA "ANTAL" OCH VILKA REKTANGLAR FICK NI I UPPG C1? ÄR NI ÖVERTYGDA OM ATT NI HAR FÅTT MED ALLA? VARFÖR? FÖRKLARA FÖR VARANDRA, VAR KRITISKA! TITTA I VRETBLAD, SATS 2.14. ÄR DETTA TILL NÅGON HJÄLP? 2.16

D1 STÖRSTA GEMENSAMMA DELAREN TILL a OCH b , $\text{SGD}(a,b)$, DEFINIERAS I BOKEN SOM DET STÖRSTA HELTAL SOM DELAR BÅDE a OCH b . VAD ÄR $\text{SGD}(6,8)$, $\text{SGD}(-5,3)$, $\text{SGD}(6,0)$?

(i) VARFÖR ÄR DETTA EN KORREKT DEFINITION FÖR ALLA PAR AV HELTAL a OCH b DÄR INTE BÅDA ÄR NOLL?

(ii) VARFÖR ÄR INTE $\text{SGD}(0,0)$ VÄLDEFINIERAT MED DENNA DEFINITION?

D2 I BOKEN GES EN METOD, EUKLIDES ALGORITM, ATT BERÄKNA $\text{SGD}(a,b)$. LÄS DET OCH GÖR ÖVN. 2.17, 2.18

2.33, 2.34

D3 VAD ÄR MINSTA GEMENSAMMA MULTIPLEN TILL TVÅ HELTAL a OCH b , $\text{MGM}(a,b)$? KAN NI GE EN DEFINITION? NÄR BEHÖVER MAN $\text{MGM}(a,b)$?

D4 ANVÄND ARITMETIKENS FUNDAMENTALSATS
FÖR ATT AVGÖRA VILKA AV FÖLJANDE PÅSTÄNDEN
SOM ÄR SANNA RESP. FALSKA

- a) OM a ÄR DELBART MED 2 OCH 3 SÅ ÄR
 a DELBART MED $2 \cdot 3 = 6$
- b) OM a ÄR DELBART MED 2 OCH 6 SÅ ÄR
 a DELBART MED $2 \cdot 6 = 12$.
- c) OM a ÄR DELBART MED 8 OCH 9 SÅ
ÄR a DELBART MED $8 \cdot 9 = 72$.

D5 ANGE FÖRUTSÄTTNINGAR PÅ a OCH b SÅ ATT
FÖLJANDE PÅSTÄNDE BLIR SANT :

a OCH b DELAR $d \Rightarrow ab$ DELAR d

D6 GENOM PRIMFAKTORUPPDELNING AV a OCH b KAN
MAN BERÄKNA $\text{SGD}(a,b)$ OCH $\text{MGM}(a,b)$, MEN
DET ÄR INGEN PRAKTISK METOD. FÖR ATT
BERÄKNA $\text{SGD}(a,b)$ ÄR EUKLIDES ALGORITM MYCKET
EFFEKTIVARE!

a) BERÄKNA $\text{SGD}(28,30)$ OCH $\text{MGM}(28,30)$ GENOM ATT
PRIMTALSFAKTORISERA 28 OCH 30. SER DU
NÅGOT SAMBAND MELLAN $\text{SGD}(28,30)$ OCH
 $\text{MGM}(28,30)$?

b) FÖRSÖK FORMULERA ETT SAMBAND MELLAN
 $\text{SGD}(a,b)$ OCH $\text{MGM}(a,b)$. BEVISA!

D7 GÖR ÖVN. 2.20, 2.21, 2.22, 2.25, 2.48, 2.50, 2.60
2.46, 2.47, 2.48, 2.8, 2.105, 2.107, 2.117

E1 BETRakta POLYNOMET

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

DÄR KOEFFICIENTERNA a_0, a_1, \dots, a_n ÄR
HELTAL. ANTAG ATT POLYNOMET HAR
ETT RATIONELLT NOLLSTÄLLE $\alpha = \frac{p}{q}$,
DÄR p OCH q ÄR HELTAL OCH $\text{SGD}(p,q) = 1$.
VISA ATT DÅ MÅSTE $p|a_0$ OCH $q|a_n$.

E2 GÖR EN LISTA ÖVER ALLA
TÄNKBARA RATIONELLA RÖTTER TILL
EKVATIONEN

$$15x^3 + 10x^2 + 21x + 14 = 0$$

LÖS DÄREFTER EKVATIONEN.

E3 Denna julen ville tomten vara riktigt rättvis(?) genom att dela ut lika
många paket till alla barn (som fick paket överhuvudtaget!). Det visade
sig att om han gav barnen två paket vardera så fick han ett paket över
i säcken. Samma sak hände om han gav barnen tre paket vardera, eller
fyra, eller fem, eller sex paket vardera. Men om han gav barnen sju paket
vardera så gick det jämnt upp. Hur många paket hade tomten i säcken?

