MMG200, Linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 20 dec. 2007

1. (a) Sant.
   Riktningsvektorn för den första linjen, $(-2, 3)$, och normalvektorn för den andra, $(3, 2)$ är ortogonala.

   (b) Sant.
   Eftersom $A\mathbf{v} = (6, 3) = 3(2, 1) = 3\mathbf{v}$ är $\mathbf{v}$ en egenvektor med egenvärdet 3.

   (c) Falskt.
   Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har högst två pivotelement (ett i varje rad) så det finns minst en fri variabel och alltså har ekvationen oändligt många lösningar.

   (d) Falskt.
   Att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har entydig lösning betyder att det inte finns någon fri variabel. Det gäller också för $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så om det finns en lösning är den entydig.

   (e) Sant.
   Eftersom $Q^TQ = I$ gäller $\mathbf{x} = I\mathbf{x} = Q^TQ\mathbf{x} = Q^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

   (f) Falskt.
   Villkoret $AA^{-1} = I$ medför att både A och A^{-1} är inverterbara. Men $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är *inte* inverterbar.

   (g) Sant.
   Observera att $(2, 1)$ och $(-1, 2)$ är ortogonala. Så $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ är en ortogonal matris. Så om $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ så uppfyller $A = QDQ^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ villkoren.

   (h) Sant.
   En vektor $\mathbf{v}$ som är ortogonal mot linjen uppfyller att $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, så $\mathbf{v}$ är en egenvektor med egenvärdet -1.

2. Planet har normalvektorn $\mathbf{n} = (2, 0, 1)$. Låt $Q_t = P + t\mathbf{n} = (2 + 2t, -2, -1 + t)$ och välj t så att Q_t ligger i planet dvs.

$(2+2t)+(-1+t)=4$ eller $t=\frac{1}{5}$. Då gäller att avståndet är $d=|\overrightarrow{PQ}_{\frac{1}{5}}|=|\frac{1}{5}\mathbf{n}|=\frac{1}{5}\sqrt{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Gaussellimination ger

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&1&1&3\\1&1&1&p\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&1&1&3\\0&0&0&p-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&2&1\\0&0&0&p-1\end{bmatrix}.$$

(a) Om $p=1$ har A rang 3, annars är rangen 4.

(b) Pivotkolonnerna (de tre första) i A är en bas för kolonnrummet. Så $(1,0,0,1)$, $(1,1,1,1)$ och $(1,-1,1,1)$ är en bas för kolonnrummet.

(c) Variabeln x_4 är fri så med $x_4=2t$ får vi lösningen

$$\begin{cases}x_1=4t\\x_2=-5t\\x_3=-t\\x_4=2t\end{cases}\quad\text{eller } \mathbf{x}=t\begin{bmatrix}4\\-5\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

Så $(4,-5,-1,2)$ är en bas för nollrummet.

4. Eftersom $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=(3,0,-3)=3(1,0,-1)$ är $\mathbf{e}_3$ vinkelrät mot både $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Så $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en ortogonalbas.

Om $\mathbf{v}=(1,2,3)$, och (x,y,z) dess koordinater i den nya basen gäller

$$x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3=\mathbf{v}\ .$$

Skalärmultiplikation med $\mathbf{e}_1$ ger $x\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{v}$ eller $2x=6$ och $x=2$. På liknande sätt får vi $y\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{v}$, $6y=0$ och $y=0$, samt $z\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{v}$, $2z=-2$ och $z=-1$. Alltså har $\mathbf{v}$ koordinaterna $(2,0,1)$ i den nya basen.

5. Idealt vill vi att den sökta linjen $y=ax+b$ skall uppfylla

$$\begin{cases}-a+b=1\\b=0\\a+b=-2\\2a+b=-2\end{cases}$$

Minstakvadratlösningen till detta system ges av $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ där

$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\text{ och }\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Nu är $A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ och $A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vi får systemet $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & -7 \\ 2 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & -7 \\ -10 & 0 & 11 \end{array}\right)$

med lösningen $a = -11/10$ och $b = -2/10$. Så den sökta linjen är $y = \frac{1}{10}(-11x - 2)$.

6. (a)

Att $A\mathbf{x_0} = \mathbf{x_0}$ eller $(A - I)\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ ger

$$A-I \sim 2A-2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

med lösningen $\mathbf{x_0} = t(1, 1, 1)$

(b)

Vi bestämmer egenvärdena. Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \frac{1}{8}\det(2A - 2\lambda I) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{addera de två första} \\ \text{raderna till den sista} \end{array}\right) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 2-2\lambda & 2-2\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \frac{1}{4}(\lambda - 1)(2\lambda - 1)(2\lambda + 1)\,.$$

Så egenvärdena är 1, $\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{2}$.

Enligt (a) vet vi att $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ är en egenvektor till med egenvärdet 1. Låt $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ vara egenvektorer med egenvärdena $\frac{1}{2}$ respektive $-\frac{1}{2}$. Eftersom A är symmetrisk vet vi att $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är en ortogonalbas för $\mathbb{R}^3$. Så varje vektor $\mathbf{x_0}$ kan skrivas

$$\mathbf{x_0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3\,.$$

Detta ger

$$\mathbf{x_n} = A^n\mathbf{x_0} = c_1 A^n \mathbf{v}_1 + c_2 A^n \mathbf{v}_2 + c_3 A^n \mathbf{v}_3$$
$$= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 + c_3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_3 \to c_1\mathbf{v}_1,\ n \to \infty\,.$$

Så $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} \to \mathbf{0}$, när $c_1 = 0$ dvs. när $\mathbf{x_0} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. $\text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är det ortogonala komplementet till $\mathbf{v}_1$. För att beskriva detta explicit observerar vi att vektorerna $(1,-1,0)$ och $(1,1,-2)$ tillsammans med $\mathbf{v}_1$ är en ortogonalbas för $\mathbb{R}^3$. Alltså gäller $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} \to \mathbf{0}$ när $\mathbf{x_0} \in \text{Span}\{(1,-1,0),(1,1,-2)\}$.

Anmärkning. Vektorerna $(1,-1,0)$ och $(1,1,-2)$ är inte egenvektorer till A men $\text{Span}\{(1,-1,0),(1,1,-2)\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. En kalkyl visar att $\mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$ och $\mathbf{v}_3 = (1,-2,1)$ så ett alternativt svar är att $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} \to \mathbf{0}$ när $\mathbf{x_0} \in \text{Span}\{(1,0,-1),(1,-2,1)\}$.

7. Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ vara en bas för V. Då gäller

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 = x_3\mathbf{e}_1 + y_3\mathbf{e}_2 \end{cases} .$$

Antag att

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} . \tag{1}$$

Detta kan skrivas

$$c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

eller

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} .$$

Detta är ett ekvationssystem med fler obekanta (tre) än ekvationer (två), så (1) har alltså en icke-trivial lösning. Alltså är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ linjärt beroende.

8. Vi observerar först att $A^5\mathbf{v} = AA^4\mathbf{v} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ och $A^6\mathbf{v} = AA^5\mathbf{v} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Antag nu att

$$c_0\mathbf{v} + c_1A\mathbf{v} + c_2A^2\mathbf{v}_2 + c_3A^3\mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Genom att i tur och ordning applicera A, A^2 och A^3 på denna ekvation får vi

$$\begin{cases} c_0\mathbf{v} + c_1A\mathbf{v} + c_2A^2\mathbf{v}_2 + c_3A^3\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ c_0A\mathbf{v} + c_1A^2\mathbf{v}_2 + c_2A^3\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ c_0A^2\mathbf{v}_2 + c_1A^3\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ c_0A^3\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} .$$

Om $A^3\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ får vi $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$ vilket innebär att de fyra vektorerna $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}$ är linjärt oberoende. Men fyra vektorer i $\mathbb{R}^3$ är alltid linjärt beroende. Alltså gäller $A^3\mathbf{v} = \mathbf{0}$.