MMG200, Linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 26 mars 2008

1. (a) Sant.
   Eftersom A är linjär gäller $A(2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 2A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{b}$.

   (b) Sant.
   Planet $z = x + 2y + 3$ eller $x + 2y - z = -3$ har normalvektorn $(1, 2, -1)$. Eftersom $(2, 4, -2) = 2(1, 2, -1)$ är $(2, 4, -2)$ parallell med normalvektorn och alltså vinkelrät mot planet.

   (c) Falskt.
   Om kolonnvektorerna i A, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, är linjärt oberoende så finns $\mathbf{x} \neq 0$ så att

   $$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_1 + \ldots + x_1\mathbf{a}_n = \mathbf{0} .$$

   Detta kan skrivas $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så lösningen är inte entydig.

   (d) Falskt.
   Vi har $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$. Denna vektor är inte parallell med $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (e) Falskt.
   Ett motexempel ges av $A = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då gäller $AC = O = BC$ men $A \neq B$.

   (f) Sant.
   Eftersom $\det C \neq 0$ är C inverterbar och alltså gäller $A = C^{-1}(CA) = C^{-1}(CB) = B$.

   (g) Falskt.
   Vi har $\dim(\text{Col } A) + \dim(\text{Nul } A) = 5$.

   (h) Sant.
   Om $\mathbf{x}_1 A\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n A\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ så $A(\mathbf{x}_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$. Eftersom A är inverterbar, speciellt injektiv, följer att $\mathbf{x}_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$. Men $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende och alltså är $\mathbf{x}_1 = \ldots = \mathbf{x}_n = 0$. Detta betyder att $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots,$

$A\mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende och påståendet följer eftersom n linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.

2. Låt $P_0 = (0,1,2)$, $P_1 = (1,2,3)$, $P_2 = (1,1,3)$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (1,1,1)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (1,0,1)$. Arean av rektangeln som spänns av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Triangelarean är alltså $\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

   Men
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,1)\,.$$
   Så arean blir $\frac{1}{2}|(1,0,1)| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Gausselimination ger
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 2 & 2a+3 & 3 \\ 1 & a+1 & 2a+3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2 \\ 0 & a & a+2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2 \\ 1 & 0 & (a+2)(1-a) & 2(1-a) \end{array}\right).$$
   Så om $(a+2)(1-a) \neq 0$, dvs. om $a \neq 1$ eller $a \neq -2$ har systemet precis en lösning, om $a = 1$ har det oändligt många lösningar och om $a = -2$ saknas lösning.

4. Låt $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ vara standardbasen, $\mathbf{f}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{f}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{f}_3 = (0,1,1)$. Då gäller $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1$ och $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$. Så $A\mathbf{e}_1 = A\mathbf{f}_1 - A\mathbf{f}_3 = (0,1,0)$, $A\mathbf{e}_2 = A\mathbf{f}_2 + A\mathbf{f}_3 - A\mathbf{f}_1 = (0,0,1)$ och $A\mathbf{e}_3 = A\mathbf{f}_1 - A\mathbf{f}_2 = (0,0,-1)$. Avbildningen A ges alltså av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & A\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Minstakvadratlösningen ges av $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Vi har
$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$
   och
$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$
   Gausselimination ger
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Så

$$\begin{cases} x = & 4+t \\ y = & -1-t \\ z = & t \end{cases} .$$

(b) Den sökta punkten ges av $A\mathbf{x}$ där $\mathbf{x}$ är någon minstakvadratlösning, t.ex. $\mathbf{x} = (4, -1, 0)$. Vi får

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

6. Vi börjar med att diagonalisera matrisen A.

(a) Egenvärden.

Vi har

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-7)+18 = \lambda^2-5\lambda+4 = (\lambda-1)(\lambda-4) .$$

Så egenvärdena är 1 och 4.

(b) Egenvektorer.

$\lambda = 1$:

Då gäller $A - I = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $\mathbf{u} = (1, -2)$ är en egenvektor med egenvärdet 1.

$\lambda = 4$:

Då gäller $A - 4I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $\mathbf{v} = (1, -1)$ är en egenvektor med egenvärdet 4.

Låt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ och $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Då gäller $A = PD_2P^{-1}$.

Om $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ så gäller $D^2 = D_2$ och alltså

$$A = PD_2P^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1}PDP^{-1} .$$

Så om $B = PDP^{-1}$ gäller $B^2 = A$.

Det återstår att beräkna B. Etersom

$$\left(P \mid I \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

är $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och

$$B = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

7. Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ vara en bas för V. Då gäller

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 = x_3\mathbf{e}_1 + y_3\mathbf{e}_2 \end{cases} .$$

Antag att

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} . \tag{1}$$

Detta kan skrivas

$$c_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

eller

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} .$$

Detta är ett ekvationssystem med fler obekanta (tre) än ekvationer (två), så (1) har alltså en icke-trivial lösning. Alltså är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ linjärt beroende.

8. Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har fler obekanta än ekvationer och alltså har det en icketrivial lösning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Detta ger $(A^TA)\mathbf{x} = A^T(A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Detta betyder att A^TA inte är injektiv och alltså inte inverterbar. Så $\det(A^TA) = 0$.