MMG200, Linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 25 augusti 2008

1. (a) Falskt.
   Låt till exempel $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$ och $\mathbf{v}_4$ vilken vektor som helst.

   (b) Falskt.
   Låt t.ex. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

   (c) Sant.
   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   (d) Sant.
   Om A och B är injektiva (eller surjektiva) så är AB dt också.

   (e) Sant.
   Vi har $Q^{-1} = Q^T$ så $Q\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ger $\mathbf{x} = Q^TQ\mathbf{x} = Q^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

   (f) Falskt.
   Lå t.ex. $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = I$ och $A = I + C$. Då gäller $A \neq B$, men $CA = C$ och $CB = C(I + C) = C + C^2 = C$.

   (g) Sant.
   Låt $\mathbf{u} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Då år $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

   (h) Falskt.
   Eftersom A är symmetrisk kan den diagonaliseras, $A = PDP^{-1}$, där $D \neq \mathbf{0}$ och alltså även $D^5 \neq \mathbf{0}$. Så $A^5 = PD^5P^{-1} \neq \mathbf{0}$.

2. Låt $\mathbf{u} = (1, 3, 2, -4)$, $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, 0, -2)$ och $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, -2)$ och betrakta ekvationen $\mathbf{u} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Andra koordinaten i ekvationen ger $y = 3$, tredje koordinaten ger $x = -2$. Sedan ser vi att både första och fjärde koordinaten stämmer om vi sätter $z = -4$. Så vi har $\mathbf{u} = -2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3$.

   Detta följer förstås också med Gaussellimination,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Linjen $y = -2x$ har riktningsvektor $\mathbf{v} = (1, -2)$. Så om $\mathbf{u} = (x, y)$ så ges $A\mathbf{u}$ av ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$, dvs.

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{x - 2y}{5}(1, -2) = \frac{1}{5}(x - 2y, -2x + 4y)$$

så

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Gaussellimination ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Så lösningen är $(x, y, z) = (1 - 2t, -t, t) = (1, 0, 0) + t(-2, -1, 1)$. Den punkt på denna linje som ligger närmast origo ges av det t sådant att (x, y, z) är vinkelrät mot linjens riktningsvektor $(-2, -1, 1)$. Vi får $(1 - 2t, -t, t) \cdot (-2, -1, 1) = -2 + 4t + t + t = 6t - 2 = 0$ och $t = \frac{1}{3}$. Punkten blir alltså $\frac{1}{3}(1, -1, 1)$.

5. Om linjens ekvation är $y = ax$ vill vi ha

$$\begin{cases} 1a = 1 \\ 2a = 3 \\ 3a = 4 \\ 4a = 4 \end{cases}.$$

Minstakvadratlösningen ges av $A^T A a = A^T \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Men $A^T A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ och $A^T \mathbf{b} = 1 + 6 + 12 + 16 = 35$ får vi $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$. Den sökta linjen blir alltså $y = \frac{7}{6}x$.

6. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ -0,3 & 1,3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ m_n \end{bmatrix}.$$

Då gäller $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$.

Vi börjar med att bestämma egenvektorer till A. Den karakteristiska polynom är

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0,4 - \lambda & 0,6 \\ -0,3 & 1,3 - \lambda \end{vmatrix} = \ldots = (1 - \lambda)(0,7 - \lambda).$$

Så egenvärdena är 1 och 4. Så egenvärdena blir 1 och $0,7$.

Egenvektorer.

$\lambda = 1$:

Då gäller $A - I = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,6 \\ -0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $\mathbf{u} = (1,1)$ är en egenvektor med egenvärdet 1.

$\lambda = 0,7$:

Då gäller $A - 0,7I = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,6 \\ -0,3 & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $\mathbf{v} = (2,1)$ är en egenvektor med egenvärdet $0,7$.

Vi söker x, y så att $\mathbf{x}_0 = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$, dvs. lösningar till ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

med lösningen $x = 4$ och $y = -1$. Vi får $\mathbf{x}_n = A^n(4\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 4\mathbf{u} - 0,7^n\mathbf{v}$ Så efter n år finns det $400 - 0,7^n \cdot 20\,000$ ugglor och $40\,000 - 0,7^n \cdot 10\,000$ möss.(När $n \to \infty$ får vi en population på 400 ugglor och 40 000 möss.)

7. Tag en vektor $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$ i H. Om $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1) = H$ är $\mathbf{b}_1$ en bas för H och dimensionen är $1 (\leq 3)$ och vi är klara.

   Om inte finns det en vektor $\mathbf{b}_2$ i H som inte ligger i $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1)$. Om $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = H$ är $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ en bas för H och dimensionen är $2 (\leq 3)$ och vi är klara.

   Om inte finns det en vektor $\mathbf{b}_3$ i H som inte ligger i $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Då är $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ en bas för H Ty om inte $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är en bas, så finns en vektor $\mathbf{v}$ som inte ligger i $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, men då skulle vi ha 4 linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ vilket är omöjligt, Alltså är dimensionen för H $3 (\leq 3)$ och vi är klara.

8. Vi vet att $\det(A - \lambda I) = 0$ och skall visa att $\det(B - \lambda I) = 0$. Men eftersom $B - \lambda I = PAP^{-1} - \lambda I = PAP^{-1} - \lambda PIP^{-1} = P(A - \lambda I)P^{-1}$. Enligt produktregeln för determinanter gäller $\det(B - \lambda I) = \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) = \det(P) = \det(A - \lambda I)\det(P^{-1}) = 0$.