**MATEMATIK**
**Chalmers Tekniska Högskola**
**Lösningar till tentamen i Linjär algebra, MMG200, 20081219**

---

1. (a) Linjen ges på parameterform tex av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Planet skall ha linjen riktningsvektor som normalvektor och innehålla den angivna punkten. Planet ges då av

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1(x+1)+2(y-0)+3(z-2) = x+2y+3z-5.$$

2. (a) T ex Sarrus regel ger att $det(M) = 32 \neq 0$ vilket betyder att kolonnerna är linjärt oberoende.

(b) Beräkninger ger att $M^tM = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$ vilket ger att alla skalärprodukter mellan olika kolonner är noll, dvs de är ortogonala.

(c) (a) följer av (b). T ex insar man det kontrapositiva sambandet eftersom om tre vektorer är linjärt beroende så ligger de i ett plan och man kan inte ha tre parvis ortogonala vektorer i ett plan. Motexempel på det omvärnda sambandet ges tex av matrisen

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

eftersom den har determinant 31, dvs har linjärt oberoende kolonner, men nu är tex inte kolonne 1 och 3 ortogonala.

3. Gausseliminerar totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right)$$

Om $a \neq 3$ saknas lösning. Om $a = 3$ ger bakåtsubstitution läsningen $(x, y, z, u) = (t+3, -t-1, 2, t)$.

4. (a) Produkten blir

$$A^tB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10-2-7 & -6+1+5 & 1+0-1 \\ 20-6-14 & -12+3+10 & 2-2 \\ 30-16-14 & -18+8+10 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(b) Vi ser i (a) ovan att $A^t$ är invers till $B$. Alltså är

$$A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Vi ser att

$$Det(AB) = Det(A)Det(B) = Det(A^t)Det(B) = Det(A^tB) = Det(I) = 1$$

där vi har använt produktregeln för determinanter och det faktum att en matris och dess transponat har samma determinant samt slutsatsen i (a) ovan.

5. (a) Uppgiften ger att

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ och } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Mutliplicerar med inversen av $2 \times 2$-matrisen och får

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Nej, en funktion kan inte avbilda surjektivt från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$.

(c) Bilden av matrisavbildningen utgörs av planet som spänns upp av de två vektorerna. Planet har då normalvektor

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Alltså saknas lösning t ex för högeledet

$$\underline{=} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(d) Man löser ekvationsystemet $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ dvs

$$\begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 21 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

6. (a) Matrisen M ges av $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   (b) $M$´s egenvärden är nollställen till $0 = (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{2}{3} - \lambda) - \frac{1}{6}$. Nollställena är $\frac{1}{6}$ och 1. Motsvarande egenvärden är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Fördelningen stabiliseras mot egenvektorn som motsvarar egenvärde 1 d v s Abraham får $\frac{2}{5}$ och Budda $\frac{3}{5}$ av alla ägodelar.

7. (a) Ser att $\mathbf{0} = -A^2 - A = A(-A - I)$ dvs $-A - I$ är invers till $A$.

   (b) Multiplicerar båda led i likheten $A^2 = -A - I$ med $A$ och får $A^3 = -A^2 - A = I$.

   (c) Ser att $1 = det(I) = det(A^3) = det(A)^3$ dvs eftersom $det(A)$ är reellt är $det(A) = 1$.

8. Utgår från likheten $|\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}| = |\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w}|$. Ser först att

$$VL = |\mathbf{u}{+}2\mathbf{v}{+}\mathbf{w}|^2 = (\mathbf{u}{+}2\mathbf{v}{+}\mathbf{w})\cdot(\mathbf{u}{+}2\mathbf{v}{+}\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}{+}4\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}{+}\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}{+}4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}{+}2\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}{+}4\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

. Pss är

$$HL = |\mathbf{u}{+}\mathbf{v}{+}2\mathbf{w}|^2 = (\mathbf{u}{+}\mathbf{v}{+}2\mathbf{w})\cdot(\mathbf{u}{+}\mathbf{v}{+}2\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}{+}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}{+}4\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}{+}2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}{+}4\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}{+}4\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

Likhetet gäller omm

$$2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -3\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}{+}3\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}{+}2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -3|\mathbf{u}|^2{+}3|\mathbf{w}|^2{+}2|\mathbf{u}||\mathbf{u}|\cos(\frac{\pi}{3}) = -3\cdot 4{+}3\cdot 1{+}2\cdot 5\frac{1}{2} = -4$$

Får då att om $\alpha$ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så får vi sambandet $-4 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\alpha) = 5 \cdot 2\cos(\alpha)$, d v s $\cos(\alpha) = -\frac{1}{5}$. Slutsats: $\alpha = \arccos(-\frac{1}{5})$