

Lösningar till Linjär algebra
MMG 200:2. 2010-12-17

- ① $\frac{a}{f} \frac{b}{s} \frac{c}{f} \frac{d}{f} \frac{e}{f} \frac{f}{s} \frac{g}{f} \frac{h}{s}$
- ② Sats 2, sid 396 i Lay.
- ③ Sats 10, sid 99 i Lay.
- ④ $v_1 = (2, 1, 1) - (1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ och $v_2 = (-1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-2, 1, 1)$ ligger båda i planet. En normalvektor: $v_1 \times v_2 = (1, -1, 3)$
Planets ekvation: $1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-0) + 3 \cdot (z-1) = 0$,
dvs $x - y + 3z = 4$

⑤ $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}$

Hörsta-kvadrat-lösningen är $(x, y, z) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bas för $\text{Col}(A)$ utgörs av pivokolumnerna, dvs $\{(1, 1, 2, 2)^T, (0, 2, 2, 4)^T\}$. Nollrummet:

$\begin{cases} x_1 = -r - t \\ x_2 = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}, x = \frac{1}{2}r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En bas för

$\text{Nul}(A) = \{(-2, 1, 2, 0, 0)^T, (0, -1, 0, 2, 0)^T, (-1, 0, 0, 0, 1)^T\}$

⑦ Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2), \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

Egenvektorer:

$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allmän lösning $x = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ger $C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C_1 = 2, C_2 = -3$

$x = e^{2t} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} - e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

⑧ $W \subseteq \mathbb{R}^5$ spänns av $v_1 = (0, -1, 1, 0, 0)^T$ och $v_2 = (1, 1, -1, 1, 2)^T$.
Ej ortogonala! Ortogonalisera:

$u_1 = v_1, u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2 + v_1 = (1, 0, 0, 1, 2)^T$

Projecera $y = (2, 3, -1, 2, 4)$ på $W = \{u_1, u_2\}$
är en ortogonalbas för W så projektionen,

$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = -\frac{4}{2} u_1 + \frac{17}{6} u_2 = -2u_1 + 2u_2 = \underline{(2, 2, -2, 2, 4)^T}$

Lösningar till Linjär algebra
MMG 200:2. 2010-12-17

① $\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ f & s & f & f & f & s & f & s \end{matrix}$

② Sats 2, sid 396 i Lay.

③ Sats 10, sid 99 i Lay.

④ $v_1 = (2, 1, 1) - (1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ och
 $v_2 = (-1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-2, 1, 1)$ ligger båda
i planet. En normalvektor: $v_1 \times v_2 = (1, -1, 3)$
Planet's ekvation: $1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-0) + 3 \cdot (z-1) = 0$,
dvs $x - y + 3z = 4$

⑤ $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}$

Minsta-kvadrat-lösningen är $(x, y, z) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bas för $\text{Col}(A)$ utgörs av pivokolumnerna, dvs

$\{(1, 1, 2, 2)^T, (0, 2, 2, 4)^T\}$. Nullrummet:

$\begin{cases} x_1 = -r - t \\ x_2 = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$, $x = \frac{1}{2}r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En bas för

$\text{Nul}(A) = \{(-2, 1, 2, 0, 0)^T, (0, -1, 0, 2, 0)^T, (-1, 0, 0, 0, 1)^T\}$

⑦ Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$

Egenvektorer:

$\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v_1 = t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allmän lösning $x = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ger $C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C_1 = 2$, $C_2 = -3$

$x = e^{2t} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} - e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

⑧ $W \subseteq \mathbb{R}^5$ spänns av $v_1 = (0, -1, 1, 0, 0)^T$ och $v_2 = (1, 1, -1, 1, 2)^T$.

Ej ortogonala! Ortogonalisera:

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2 + v_1 = (1, 0, 0, 1, 2)^T$

Projecera $y = (2, 3, -1, 2, 4)$ på $W = \{u_1, u_2\}$

är en ortogonalbas för W så projektionen,

$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = -\frac{4}{2} u_1 + \frac{17}{6} u_2 =$

$= -2u_1 + 2u_2 = (2, 2, -2, 2, 4)^T$

Lösningar till Linjär algebra
MMG 200:2. 2010-12-17

- ① $\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ f & s & f & f & f & s & f & s \end{matrix}$
- ② Sats 2, sid 396 i Lay.
- ③ Sats 10, sid 99 i Lay.
- ④ $\Psi_1 = (2, 1, 1) - (1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ och
 $\Psi_2 = (-1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-2, 1, 1)$ ligger båda
i planet. En normalvektor: $\Psi_1 \times \Psi_2 = (1, -1, 3)$
Planetets ekvation: $1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-0) + 3 \cdot (z-1) = 0$,
dus $x - y + 3z = 4$

⑤ $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Minsta-kvadrat-lösningen är $(x, y, z) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bas för $\text{Col}(A)$ utgörs av pivotkolonnerna, dus

$\{(1, 1, 2, 2)^T, (0, 2, 2, 4)^T\}$. Nollrummet:

$$\begin{cases} x_1 = -r - t \\ x_2 = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}, \quad \mathbb{R} = \frac{1}{2}r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ En bas för}$$

$\text{Nul}(A) = \{(-2, 1, 2, 0, 0)^T, (0, -1, 0, 2, 0)^T, (-1, 0, 0, 0, 1)^T\}$

⑦ Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$

Egenvektorer:

$\lambda = 2$ $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Psi_1 = t \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -2$ $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Psi_2 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Allmän lösning $\mathbb{R} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbb{R}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ ger $c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $c_1 = 2$, $c_2 = -3$

$\mathbb{R} = e^{2t} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

⑧ $W \subseteq \mathbb{R}^5$ spänns av $\Psi_1 = (0, -1, 1, 0, 0)^T$ och $\Psi_2 = (1, 1, -1, 1, 2)^T$.

Ej ortogonala! Ortogonalisera:

$u_1 = \Psi_1$, $u_2 = \Psi_2 - \frac{\Psi_2 \cdot \Psi_1}{\Psi_1 \cdot \Psi_1} \Psi_1 = \Psi_2 + \Psi_1 = (1, 0, 0, 1, 2)^T$

Projecera $\Psi = (2, 3, -1, 2, 4)$ på $W = \{u_1, u_2\}$

är en ortogonalbas för W så projektionen,

$$\hat{\Psi} = \frac{\Psi \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{\Psi \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = -\frac{4}{2} u_1 + \frac{12}{6} u_2 = -2u_1 + 2u_2 = (2, 2, -2, 2, 4)^T$$