Lösningar till Linjär algebra MMG200:2. 2010-12-17

(1)

a	b	c	d	e	f	g	h
f	s	f	f	f	s	f	s

(2) Sats 2, sid 396 i Lay.

(3) Sats 10, sid 99 i Lay.

(4) $v_1 = (2,1,1)-(1,0,1) = (1,1,0)$ och
$v_2 = (-1,1,2)-(1,0,1) = (-2,1,1)$ ligger båda
i planet. En normalvektor: $v_1 \times v_2 = (1,-1,3)$
Planets ekvation: $1\cdot(x-1)-1\cdot(y-0)+3(z-1)=0$,
dvs $\underline{x-y+3z=\cancel{0}4}$

---

(5) $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

Minsta-kvadrat-lösningen är $\underline{(x,y,z) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})}$

---

(6) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bas för Col(A) utgörs av pivotkolonnerna, dvs
$\underline{\{(1\ 1\ 2\ 2)^T, (0,2,2,4)^T\}}$. Nollrummet:

$$\begin{cases} x_1 = -r-t \\ x_2 = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}, \quad x = \frac{1}{2}r\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ En bas för

Nul(A): $\underline{\{(-2,1,2,0,0)^T, (0,-1,0,2,0)^T, (-1,0,0,0,1)^T\}}$

---

(7) Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$
$= \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$, $\underline{\lambda_1 = 2}$, $\underline{\lambda_2 = -2}$

Egenvektorer:

$\underline{\lambda = 2}$ $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $v_1 = t\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = -2}$ $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Allmän lösning $x = c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$x(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ ger $c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $c_1 = 2$, $c_2 = -3$

$$x = e^{2t}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

---

(8) $W \subseteq R^5$ spänns av $v_1 = (0,-1,1,0,0)^T$ och $v_2 = (1,1,-1,1,2)^T$.
Ej ortogonala! Ortogonalisera:
$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}v_1 = v_2 + v_1 = (1,0,0,1,2)^T$
Projicera $y = (2,3,-1,2,4)$ på W: $\{u_1, u_2\}$
är en ortogonalbas för W så projektionen,
$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}u_2 = -\frac{4}{2}u_1 + \frac{12}{6}u_2 =$
$= -2u_1 + 2u_2 = \underline{(2\ \ 2\ \ -2\ \ 2\ \ 4)^T}$

Lösningar till Linjär algebra
MMG200:2. 2010-12-17

①

a	b	c	d	e	f	g	h
f	s	f	f	f	s	f	s

② Sats 2, sid 396 i Lay.

③ Sats 10, sid 99 i Lay.

④ $v_1 = (2,1,1)-(1,0,1) = (1,1,0)$ och $v_2 = (-1,1,2)-(1,0,1) = (-2,1,1)$ ligger båda i planet. En normalvektor: $v_1 \times v_2 = (1,-1,3)$

Planets ekvation: $1\cdot(x-1) - 1\cdot(y-0) + 3(z-1) = 0$,

dvs $\underline{x - y + 3z = \cancel{0}4}$

---

⑤ $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

Minsta-kvadrat-lösningen är $(x,y,z) = \underline{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$

---

⑥ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bas för Col(A) utgörs av pivotkolonnerna, dvs

$\underline{\{(1\ 1\ 2\ 2)^T, (0,2,2,4)^T\}}$. Nollrummet:

$$\begin{cases} x_1 = -r - t \\ x_2 = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}, \quad x = \frac{1}{2}r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ En bas för

Nul(A): $\underline{\{(-2,1,2,0,0)^T, (0,-1,0,2,0)^T, (-1,0,0,0,1)^T\}}$

---

⑦ Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$, $\underline{\lambda_1 = 2}$, $\underline{\lambda_2 = -2}$

Egenvektorer:

$\underline{\lambda = 2}$ $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = t\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = -2}$ $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Allmän lösning $x = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$x(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ ger $c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $c_1 = 2$, $c_2 = -3$

$$x = e^{2t}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

---

⑧ $W \subseteq \mathbb{R}^5$ spänns av $v_1 = (0,-1,1,0,0)^T$ och $v_2 = (1,1,-1,1,2)^T$.

Ej ortogonala! Ortogonalisera:

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2 + v_1 = (1,0,0,1,2)^T$

Projicera $y = (2,3,-1,2,4)$ på W: $\{u_1, u_2\}$ är en ortogonalbas för W så projektionen,

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = -\frac{4}{2} u_1 + \frac{12}{6} u_2 =$$

$$= -2u_1 + 2u_2 = \underline{(2\ 2\ -2\ 2\ 4)^T}$$

Lösningar till Linjär algebra
HMG200:2. 2010-12-17

①

a	b	c	d	e	f	g	h
f	s	f	f	f	s	f	s

② Sats 2, sid 396 i Lay.

③ Sats 10, sid 99 i Lay.

④ $v_1 = (2,1,1)-(1,0,1) = (1,1,0)$ och
$v_2 = (-1,1,2)-(1,0,1) = (-2,1,1)$ ligger båda i planet. En normalvektor: $v_1 \times v_2 = (1,-1,3)$
Planets ekvation: $1\cdot(x-1)-1\cdot(y-0)+3(z-1)=0$, dvs $\underline{x-y+3z=\cancel{0}4}$

⑤ $A^TA = \begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&1&0\\2&3&1&1\\1&1&1&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc}1&1&1&0\\0&1&-1&1\\0&-1&-2&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc}1&1&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-3&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1/3\\0&1&0&2/3\\0&0&1&-1/3\end{array}\right]$$

Minsta-kvadrat-lösningen är $\underline{(x,y,z)=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})}$

⑥ $$\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\1&2&0&1&1\\2&2&1&1&2\\2&4&0&2&2\end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&2&-1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Bas för Col(A) utgörs av pivotkolonnerna, dvs
$\{(1,1,2,2)^T, (0,2,2,4)^T\}$. Nollrummet:

$$\begin{cases}x_1 = -r-t\\ x_2 = \frac{1}{2}r-\frac{1}{2}s\\ x_3 = r\\ x_4 = s\\ x_5 = t\end{cases}, \quad x = \frac{1}{2}r\begin{bmatrix}-2\\1\\2\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}s\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\2\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$ En bas för

Nul(A): $\{(-2,1,2,0,0)^T, (0,-1,0,2,0)^T, (-1,0,0,0,1)^T\}$

⑦ Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix}3-\lambda & -5\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix} =$
$= \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$, $\underline{\lambda_1 = 2}$, $\underline{\lambda_2 = -2}$

Egenvektorer:

$\underline{\lambda = 2}$ $\begin{bmatrix}1&-5\\1&-5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-5\\0&0\end{bmatrix}$ $v_1 = t\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

$\underline{\lambda=-2}$ $\begin{bmatrix}5&-5\\1&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ $v_2 = s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Allmän lösning $x = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.
$x(0) = \begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$ ger $c_1\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}5&1&7\\1&1&-1\end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$, $c_1 = 2$, $c_2 = -3$

$$x = e^{2t}\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix} - e^{-2t}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

⑧ $W \subseteq R^5$ spänns av $v_1 = (0,-1,1,0,0)^T$ och $v_2 = (1,1,-1,1,2)^T$.
Ej ortogonala! Ortogonalisera:
$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2 + v_1 = (1,0,0,1,2)^T$
Projicera $y = (2,3,-1,2,4)$ på W: $\{u_1, u_2\}$ är en ortogonalbas för W så projektionen,

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = -\frac{4}{2} u_1 + \frac{12}{6} u_2 =$$
$$= -2u_1 + 2u_2 = \underline{(2\ \ 2\ -2\ \ 2\ \ 4)^T}$$