Losningar till Linjär algebra, MMG 200:2 2011-04-26

① a, e, f, h sant. Övriga falskt.

② a) Sats 2.5, b) Sats 2.6, c) Sats 2.12

③ Sats 7.1

---

④ a) Triangeln spänns upp av vektorerna

$\mathbf{v}_1 = (2,2,0)-(1,0,1) = (1,2,-1)$ och

$\mathbf{v}_2 = (-1,1,1)-(1,0,1) = (-2,1,0)$.

$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1,2,5)$. Arean $= \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{30}}{2}}}$

b) $T = \frac{1}{3}\left[(-1,1,1)+(2,2,0)+(1,0,1)\right] = \underline{\underline{(2/3,\ 1,\ 2/3)}}$

---

⑤ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ -2 & 2 & a & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & a \end{array}\right]$

<u>Entydig lösning om $a \neq 1$ och -2.</u>

<u>$a=1$</u> $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

En fri variabel: <u>Många lösningar</u>

<u>$a=-2$</u> $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ <u>Ingen lösning</u>

---

⑥ Vi söker minsta-kvadrat-lösning till systemet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{b}}$$

, dvs vi skall lösa systemet $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 30 & 10 & 7 \\ 10 & 5 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 10 & 0 & -17 \\ 0 & 5 & 29 \end{bmatrix}$, dvs $a = -\frac{17}{10}$, $b = \frac{29}{5}$

Linjen är $\underline{\underline{y = -\frac{17}{10}t + \frac{29}{5}}}$

---

⑦ Om A är avbildningsmatrisen så gäller

$A\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, dvs $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Invertera $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right]$

Och $A = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Så $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har lösning $\underline{\underline{\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}}$ som alltså är Nollrummet.

---

⑧ $A^3 = A \Leftrightarrow A^3 - A = 0 \Leftrightarrow$ *) $A(A+I)(A-I) = 0$

Nu är $\det A \neq 0$ annars vore $\lambda = 0$ ett egenvärde.

Men också $\det(A+I) \neq 0$ — " — $\lambda = -1$ — " —

Multiplicera med $(A+I)^{-1}A^{-1}$ från vänster i *)

så får vi $A - I = 0$, dvs $A = I$.