Linjär algebra
MMG 200:2
110815

① a) sant b) falskt c) falskt d) sant
e) sant f) sant g) falskt h) falskt

② Sats 8 kap 1 : Lay

③ Sats 5 kap 6 ; Lay

---

④ En vektor i planet: $v = (1,1,0) - (0,-1,1) = (1,2,-1)$
En normalvektor är $\perp$ mot denna och linjens riktningsvektor, $(-2,1,2)$. Dvs $n \parallel (1,2,-1) \times (-2,1,2) =$
$= (5,0,5)$ Vi väljer $n = (1,0,1)$.
Planet: $1(x-1) + 0(y-1) + 1(z-0) = 0$, $\underline{\underline{x + z = 1}}$

---

⑤ $\operatorname{Dim} V(F) = 3$ om $\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a-2 \\ 1 & -a & 2-a \\ a & -4 & 0 \end{vmatrix} = (a-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2-a & 0 \\ a & -4 & 0 \end{vmatrix} = (a-2) \begin{vmatrix} 2 & -2-a \\ a & -4 \end{vmatrix} =$$

$= (a-2)(-8 + a^2 + 2a) = (a-2)^2(a+4)$. $\underline{\operatorname{Dim} V(F) = 3 \text{ för } a \neq 2, -4}$

$\underline{a = -4}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\dim V(F) = 2 \text{ för } a = -4}$

$\underline{a = 2}$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\dim V(F) = 1 \text{ för } a = 2}$.

---

⑥ <u>Egenvärden:</u> $0 = A - \lambda E = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda)$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

<u>Egenvektorer:</u> $\underline{\lambda_1 = 0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $u_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\text{normerad}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

vänd

⑥ (forts.) $\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$, $u_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$, $u_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Svar:</u> $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

---

⑦ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bas för V_F utgörs av pivotkolonnerna i ursprunglig matris, dvs $\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}}$
Bas för N_F får man genom att lösa
$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases}$
Sätt $z = t$ $y = -\frac{5}{3}t$, $x = \frac{10}{3}t - 3t = \frac{1}{3}t$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. En bas: $\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$

---

⑧ Proj. på plan: $F(u) = u - \frac{u \cdot n}{|n|^2} n$, $n = (3,-1,1)$
$F(1,0,0) = (1,0,0) - \frac{3}{11}(3,-1,1) = \frac{1}{11}(2,3,-3)$
$F(0,1,0) = (0,1,0) + \frac{1}{11}(3,-1,1) = \frac{1}{11}(3,10,1)$
$F(0,0,1) = (0,0,1) - \frac{1}{11}(3,-1,1) = \frac{1}{11}(-3,1,10)$
<u>F:s matris:</u> $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Proj. på linje: $F(u) = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$, $v = (1,1,-1)$
$G(1,0,0) = \frac{1}{3}(1,1,-1)$, $G(0,1,0) = \frac{1}{3}(1,1,-1)$, $G(0,0,1) = -\frac{1}{3}(1,1,-1)$
<u>G:s matris:</u> $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

G∘F:s matris: $BA = \frac{1}{\ldots}\,(1\;1\;-1)\,(2\;3\;-3)\quad 4\;(2\;3\;-3)$