Extra övningar på integraler

1. Visa att en funktion som är kontinuerlig utom i ett ändligt antal punkter är integrerbar. (Som vanligt förutsätts funktionen vara begränsad på ett begränsat intervall.)

2. Låt f vara den funktion som definieras på $[0, 1]$ genom

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ om } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \; om \; x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ där } p, q \in \mathbb{N} \text{ och } \mathrm{SGD}(p, q) = 1. \end{cases}$$

   (a) Visa att f är kontinuerlig i a om och endast om a är irrationellt.

   (b) Visa att f är integrerbar.

   (c) Vad är $\int_0^1 f(x)dx$?

3. Låt f vara en begränsad funktion på det slutna och begränsade intervallet $[a, b]$. Antag att f är integrerbar, $V_f \subseteq [m, M]$ och att ϕ är en kontinuerlig funktion på $[m, M]$.

   (a) Visa att $\phi \circ f$ är integrerbar.

   (b) Visa att f^2 är integrerbar.

   (c) Visa att $|f|$ är integrerbar.

   (d) Visa att om g också är integrerbar på $[a, b]$ så är fg integrerbar.

   Ledning för (a). Låt $\epsilon > 0$. Eftersom ϕ är likformigt kontinuerlig (Varför då?) så finns $0 < \delta < \epsilon$ så att $|\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$ då $|s - t| < \delta$. Låt P vara en partition av $[a, b]$ i intervall I_i och sätt $M_i = \sup\{|f(x)|; x \in I_i\}$ och $m_i = \inf\{|f(x)|; x \in I_i\}$. Man kan välja P (Varför då?) så att $S_P - s_P < \delta^2$ där $S_p = \sum_i M_i|I_i|$ och $s_P = \sum_i M_i|I_i|$. Dela in indexen i två mängder.

   I. $i \in A$ om $M_i - m_i \leq \delta$, II. $i \in B$ om $\delta < M_i - m_i$.

Definiera nu M_i^*, m_i^*, S_p^* och s_P^* för funktionen $\phi \circ f$ i analogi med motsvarande definition för f. Då gäller (Varför då?)

$$\sum_{i \in B} |I_i| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i \in B} (M_i - m_i)|I_i| \leq \frac{1}{\delta}(S_p - s_P) \leq \delta$$

och

$$S_p^* - s_P^* \leq \sum_{i \in A} + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)|I_i| \leq \epsilon \sum_{i \in A} |I_i| + 2C \sum_{i \in B} |I_i| \leq \epsilon(b-a) + 2C\delta \leq K\epsilon\,.$$

Klart?!?

4. Visa att

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

är konvergent.

Anmärkning. Man kan visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.