

**Tentamen i Envariabelanalys 2009-08-26**

- (a) Ge definitionen av att  $f(x)$  är kontinuerlig i punkten  $a$ .  
(b) Ge definitionen av att  $f(x)$  är deriverbar i punkten  $a$ .  
(c) Visa direkt från definitionen att  $f'(a) = 3a^2$  om  $f(x) = x^3$ .  
(4p)

- Visa att en kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall  $[a, b]$  är uppåt begränsad.

- Formulera och bevisa Taylors formel.

- Beräkna derivatan av

$$(\ln x)^{\ln x}$$

för  $x > 0$ .

- Bestäm alla komplexa rötter till

$$z^2 - (4 + i)z + 4i = 0.$$

- Bestäm integralen

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cos x \sin x \, dx .$$

- Definiera för  $x > 0$  funktionen  $f(x)$  genom

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} .$$

(a) Visa att  $f(x)$  har ett största värde på  $(0, \infty)$  och bestäm det  $x$  för vilket detta antas.

(b) Visa att

$$f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{10}}$$

för alla  $x > 0$ .

- Sätt för  $y > 0$

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y}{y^2 + x^2} dx.$$

Beräkna  $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y)$ .