MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2011-10-21.

1. (a) Se boken sidan 86.

   (b) Man kan t ex ta relationen '$\neq$'. Denna är uppenbarligen inte reflexiv men symmetrisk. Dessutom är den inte transitiv, ty $1 \neq 2$ och $2 \neq 1$ men $1 = 1$. Man kan också tänka sig ett litet trivialt exempel som $R = \{(1,2),(2,1)\}$.

2. (a) Se sidorna 111-112 i boken.

   (b) Se sidan 114 i boken.

3. (a) Se boken sidan 56.

   (b) Välj $x = 1$ och $y = 0$ och vice versa.

4. (a) Vi använder Euklides algoritm och får

$$\begin{aligned} 4485 &= 1 \cdot 3042 + 1443 \\ 3042 &= 2 \cdot 1443 + 156 \\ 1443 &= 9 \cdot 156 + 39 \\ 156 &= 4 \cdot 39. \end{aligned}$$

   Alltså är $\mathrm{SGD}(3042, 4485) = 39$.

   (b) Om vi startar från näst sista likheten och successivt ersätter med ekvationen ovanför så får vi

$$\begin{aligned} 39 &= 1443 - 9 \cdot 156 = 1443 - 9(3042 - 2 \cdot 1443) \\ &= -9 \cdot 3042 + 19 \cdot 1443 \\ &= -9 \cdot 3042 + 19(4485 - 3042) = 19 \cdot 4485 - 28 \cdot 3042. \end{aligned}$$

   Alltså är $19 \cdot 4485 - 28 \cdot 3042 = \mathrm{SGD}(3042, 4485)$.

5. Om vi börjar med lucian så kan den väljas på 10 olika sätt. Därefter finns det 9 flickor kvar att välja bland så de 4 tärnorna kan väljas på

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

   sätt. Till slut finns det 13 pojkar att välja stjärngossar bland vilket går på

$$\binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$$

   sätt. Enligt multiplikationsprincipen blir det totalt

$$10 \cdot 126 \cdot 78 = 98280.$$

6. Definiera först

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ och } g(n) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Vi ska då visa att $f(n) < g(n)$, eller ekvivalent att $f(n) - g(n) < 0$, för alla heltal $n > 1$. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Om $n = 2$ så får vi

$$f(2) - g(2) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Alltså stämmer det för $n = 2$.

Induktionssteg: Antag att $f(p) < g(p)$ för något $p > 1$. Visa att i så fall är $f(p+1) < g(p+1)$. Vi tittar på differensen och får om vi i andra steget utnyttjar induktionsantagandet att

$$\begin{aligned}
f(p+1) - g(p+1) &= \left(f(p) + \frac{1}{(p+1)^2}\right) - g(p+1) \\
&< g(p) + \frac{1}{(p+1)^2} - g(p+1) \\
&= \left(2 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} - \left(2 - \frac{1}{p+1}\right) \\
&= -\frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} \\
&= \frac{-(p+1)^2 + p + p(p+1)}{p(p+1)^2} \\
&= \frac{-p^2 - 2p - 1 + p + p^2 + p}{p(p+1)^2} \\
&= \frac{-1}{p(p+1)^2} < 0.
\end{aligned}$$

Enligt indukionsprinipen gäller därmed, med stöd av basfall och induktionssteg, att $f(n) < g(n)$ för alla heltal $n > 1$.

7. (a) Vi har att $1718 = 156 \cdot 11 + 2$ så $1718 \equiv 2 \pmod{11}$. Om vi tar successiva potenser av 2 modulo 11 så får vi

$$\begin{gathered}
2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 \equiv 5,\ 2^5 \equiv 10,\ 2^6 \equiv 9 \\
2^7 \equiv 7,\ 2^8 \equiv 3,\ 2^9 \equiv 6,\ 2^{10} \equiv 1.
\end{gathered}$$

Det ger att modulo 11 får vi att

$$\begin{aligned}
1718^{1632} &\equiv 2^{1632} = 2^{1630} \cdot 2^2 \\
&= (2^{10})^{163} \cdot 4 \equiv 1^{163} \cdot 4 = 4.
\end{aligned}$$

Svaret är alltså 4.

(b) Vi såg ovan att $1718 \equiv 2 \pmod{11}$ och att det minsta positiva heltalet x som uppfyller $2^x \equiv 5 \pmod{11}$ är $x = 4$. Dessutom blev $2^n \equiv 1 \pmod{11}$ första gången då $n = 10$. Det betyder att $2^{10+4} = 2^{10} \cdot 2^4 \equiv 5$, $2^{20+4} = (2^{10})^2 \cdot 2^4 \equiv 5$ etc. Sammanfattningsvis får vi att lösningarna till ekvationen är precis alla positiva heltal x som är kongruenta med 4 modulo 10.

8. Vi ska visa att $\langle G \times H, \oslash \rangle$ uppfyller de fem axiomen för att vara en abelsk grupp.

   Sluten: Vi har att $g_1 \star g_2 \in G$ och $h_1 * h_2 \in H$ eftersom $\star$ och $*$ är operatorer på G respektive H. Alltså gäller att

   $$(g_1, h_1) \oslash (g_2, h_2) = (g_1 \star g_2, h_1 * h_2) \in G \times H$$

   om $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ så $\oslash$ är sluten på $G \times H$.

   Kommutativ: Eftersom $\star$ och $*$ är kommutativa på G respektive H så får vi att

   $$\begin{aligned}(g_1, h_1) \oslash (g_2, h_2) &= (g_1 \star g_2, h_1 * h_2) \\ &= (g_2 \star g_1, h_2 * h_1) = (g_2, h_2) \oslash (g_1, h_1)\end{aligned}$$

   och alltså är $\oslash$ kommutativ.

   Associativ: Eftersom $\star$ och $*$ är associativa på G respektive H så får vi att

   $$\begin{aligned}(g_1, h_1) \oslash ((g_2, h_2) \oslash (g_3, h_3)) &= (g_1, h_1) \oslash (g_2 \star g_3, h_2 * h_3) \\ &= (g_1 \star (g_2 \star g_3), h_1 * (h_2 * h_3)) \\ &= ((g_1 \star g_2) \star g_3, (h_1 * h_2) * h_3) \\ &= (g_1 \star g_2, h_1 * h_2) \oslash (g_3, h_3) \\ &= ((g_1, h_1) \oslash (g_2, h_2)) \oslash (g_3, h_3)\end{aligned}$$

   och alltså är $\oslash$ associativ.

   Neutralt element: Låt e_G och e_H vara det neutrala elementet för $\langle G, \star \rangle$ respektive $\langle H, * \rangle$. För godtyckligt element $(g, h) \in G \times H$ gäller då att

   $$(g, h) \oslash (e_G, e_H) = (g \star e_G, h * e_H) = (g, h).$$

   Alltså är (e_G, e_H) neutralt element för $\langle G \times H, \oslash \rangle$.

   Inverst element: Tag godtyckligt element $(g, h) \in G \times H$. Det finns inverst element $g' \in G$ respektive $h' \in H$ sådana att

   $$g \star g' = e_G \text{ och } h * h' = e_H.$$

   Färmed får vi att

   $$(g, h) \oslash (g', h') = (g \star g', h * h') = (e_G, e_H)$$

   och alltså är $(g', h') \in G \times H$ inverst element till (g, h). Eftersom (g, h) var godtyckligt så har alla element i $G \times H$ inverst element.

   Därmed har vi visat att $\langle G \times H, \oslash \rangle$ uppfyller de fem axiomen för att vara en abelsk grupp.