ÖVNING 1

OM LOGIK OCH MATEMATIKENS SPRÅK

A. VAD ÄR DU SÄKER PÅ?

ÖVNINGENS SYFTE ÄR

- ATT GENOM ATT LÖSA OCH DISKUTERA NÅGRA INLEDANDE UPPGIFTER FÅ ERFARENHETER OM HUR EN UPPGIFT KAN TOLKAS OCH FÖRSTÅS; VAD DET INNEBÄR ATT BEVISA ELLER MOTBEVISA ETT PÅSTÅENDE.
- ATT UTVECKLA FÖRMÅGAN TILL KRITISKT LOGISKT RESONERANDE OCH FÖRMÅGAN ATT **FORMULERA** SINA LOGISKA RESONEMANG.

A1. FUNDERA EN STUND (T.EX. NÄR DU ÄTER DIN KVÄLLSMACKA) PÅ FÖLJANDE FRÅGOR.

a) VAD MENAR DU ATT MATEMATIK ÄR FÖR NÅGOT?

b) VAD ÄR ETT PROBLEM? VAD ÄR EN LÖSNING?

c) VAD ÄR ETT BEVIS?

A2. a) VAD SÄGER PYTHAGORAS SATS? VAD BETYDER DEN GEOMETRISKT? HUR FORMULERAS SATSEN ALGEBRAISKT?

b) ÄR SATSEN SANN? VARFÖR DET?

c) DET FINNS FLERA HUNDRA BEVIS FÖR PYTHAGORAS SATS. KAN DU GENOMFÖRA NÅGOT? GÖR DET!

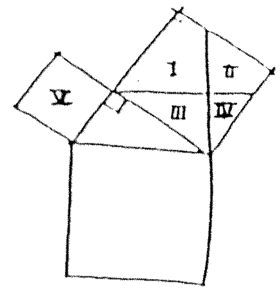
A3. DEN HÄR UPPGIFTEN KAN ALLA GÖRA UTAN STÖRRE FÖRKUNSKAPER, SÅ HOPPA INTE ÖVER DEN.

KLIPP UT 4 ST EXAKT LIKADANA RÄTVINKLIGA TRIANGLAR. KAN DU MED HJÄLP AV DESSA 4 TRIANGLAR "BEVISA" PYTHAGORAS SATS?

OM INTE, FÅR DU FÖLJANDE LEDNING:

- KAN DU LÄGGA DESSA 4 TRIANGLAR SÅ ATT DU FÅR EN YTTERKONTUR, SOM ÄR EN KVADRAT OCH ETT "HÅL" SOM OCKSÅ ÄR EN KVADRAT? RITA I SÅ FALL UPP DENNA KVADRATISKA YTTERKONTUR.
- KAN DU NU, I DENNA KVADRATISKA YTTERKONTUR FLYTTA OM TRIANGLARNA SÅ ATT DU FÅR 2 ST KVADRATISKA HÅL? I SÅ FALL ÄR "BEVISET" NÄSTAN KLART.

(A4.) BETRAKTA FIGUREN INTILL. FIGUREN FÖRESTÄLLER EN RÄTVINKLIG TRIANGEL MED 3 ST KVADRATER, SOM ANSLUTER TILL TRIANGELNS 3 SIDOR. MED HJÄLP AV IDÉN I FIGUREN KAN DU NU "BEVISA" PYTHAGORAS SATS. HUR?



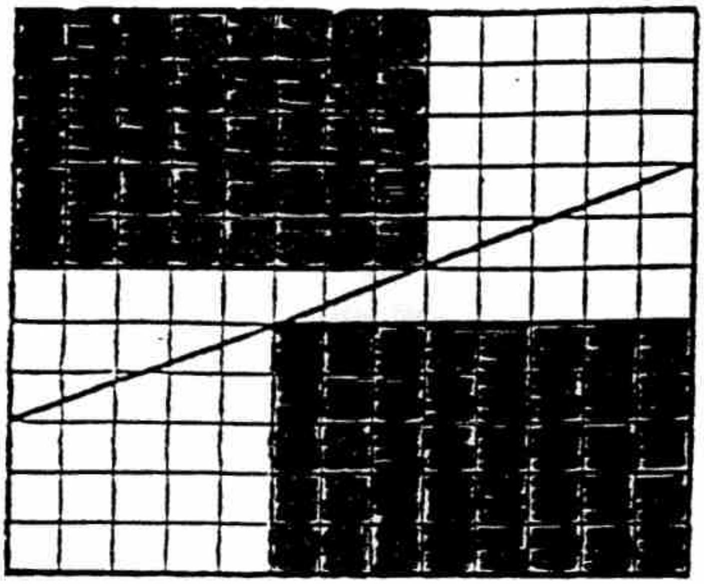
A5. KLIPP UT EN AV FIGURERNA PÅ NÄSTA SIDA. KLIPP DÄREFTER UT DE 4 VITA DELFIGURERNA.

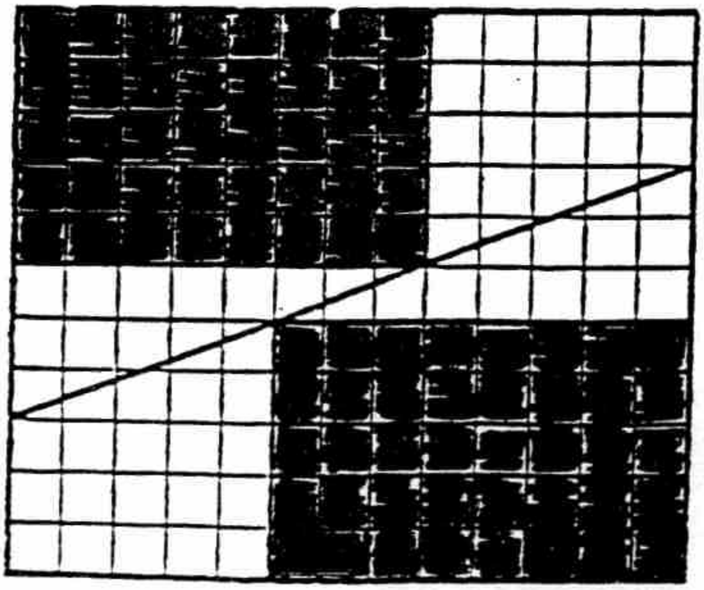
a) KAN DU AV DESSA 4 VITA DELAR LÄGGA EN KVADRAT?

b) " " " " " " " " " REKTANGEL SOM INTE ÄR EN KVADRAT?

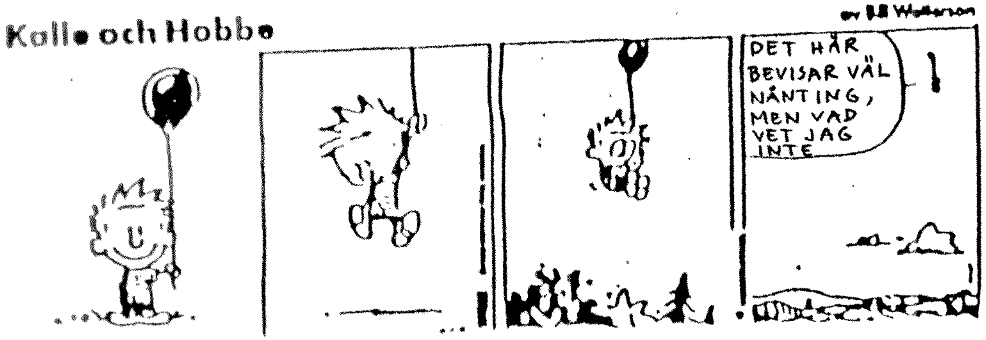
c) LYCKADES DU? BETRAKTA I SÅ FALL AREAN AV KVADRATEN RESPEKTIVE REKTANGELN.

BLEV DU ÖVERRASKAD? NÅGOT STÄMMER INTE? HUR FÖRKLARAR DU DETTA? PRATA MED KOMPISARNA!

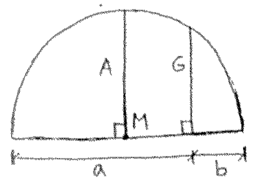




A6. ÅTERVÄND NU TILL FRÅGA A1, SPECIELLT b & c.



A7. VISA ATT ARITMETISKT OCH GEOMETRISKT MEDELVÄRDE OCH SKILLNADEN MELLAN DESSA KAN GEOMETRISKT UTTRYCKAS I FÖLJANDE FIGUR. SE VRETBLAD S. ~~25-26~~ 28-29.

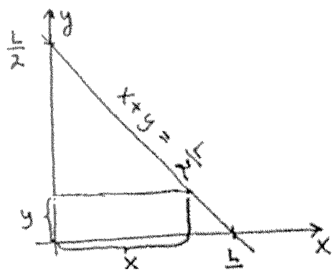


FIGUREN VISAR EN HALVCIRKEL MED MEDELPUNKT I M OCH MED RADIEN $A = \frac{a+b}{2}$. (VISA ATT $G = \sqrt{ab}$)

A8. GÖR ÖVN. ~~11~~ 1.6 I BOKEN (DVS VRETBLAD). GE ÖVNINGEN GEOMETRISKA TOLKNINGAR.

A9. DISKUTERA NU SATS 1.1. DISKUTERA DE OLIKA SÄTTEN ATT TÄNKA.

A10. GÖR ÖVN. ~~12~~ 1.7 I BOKEN DELS MED ALGEBRA, DELS GENOM ATT RESONERA GEOMETRISKT:



- ÖVERTYGA ER/DIG FÖRST OM ATT ALLA REKTANGLARNA HAR SAMMA OMKRETS, L.
- VISA DÄREFTER MED ÅSKÅDLIG GEOMETRI VILKEN SOM HAR STÖRST AREA.

A11. GÖR ÖVN. ~~13~~ 1.8 OCH ~~14~~ 1.9.

A12. ÄR $1 = 2$?
VAD TYCKER DU/NI EFTER ATT HA TITTAT PÅ FÖLJANDE RESONEMANG?
LÅT a OCH b VARA TVÅ LIKA TAL. VI HAR DÅ $a=b$ OCH VI GÖR FÖLJANDE KEDJA AV SLUTSATSER.

$$a=b \Rightarrow ab = b^2 \Rightarrow ab - a^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow$$
$$a(b-a) = (b+a)(b-a) \Rightarrow a = b+a \Rightarrow a = 2a \Rightarrow 1=2$$

A13. KAN DU/NI VISA ATT OM $1=2$ SÅ ÄR ALLA POSITIVA HELTAL LIKA, DVS. $1=2=3=4=\ldots$

B. VAD BETYDER DET ATT RESONERA LOGISKT?

SYFTET ÄR ATT UTVECKLA KVALITETERNA I DET LOGISKA TÄNKANDET. VI VILL UPPNÅ STÖRSTA MÖJLIGA PRECISION OCH KLARHET, LÄRA OSS FÖRSTÅ OCH ANVÄNDA DET MATEMATISKA SPRÅKET. I DETTA SAMMANHANG ÄR FÖLJANDE BEGREPP VIKTIGA

- UTSAGA — ÖPPEN & SLUTEN
- NEGATION OCH MOTSATS $\neg$
- LOGISKA KONNEKTIV SOM
  - OCH $\wedge$
  - ELLER $\vee$
  - OM – SÅ $\Rightarrow$
  - EKVIVALENS $\Leftrightarrow$
- KVANTORER $\forall$, $\exists$

B1. UNDER VILKA OMSTÄNDIGHETER ÄR FÖLJANDE PÅSTÅENDEN SANNA RESP. FALSKA? FÖR VILKA VÄRDEN PÅ VARIABLERNA?

(i) $3 \leq 3$

(ii) $3 \leq 4$

(iii) $3 < 4$

(iv) $4 \leq 3$

(v) $\sqrt{4} = 2$ eller $\sqrt{9} = 3$

(vi) $\sqrt{x^2} = x$

(vii) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(viii) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

(ix) $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$

VAD ÄR EN UTSAGA?
VILKA AV PÅSTÅENDENA OVAN ÄR ÖPPNA UTSAGOR RESP. SLUTNA UTSAGOR?

B2 UTSAGORNA (i), (ii), (iv) OCH (v) KAN SKRIVAS SOM SAMMANSATTA UTSAGOR MED HJÄLP AV KONNEKTIVET "ELLER", $\vee$ (DVS. PÅ FORMEN $A \vee B$ DÄR A OCH B ÄR UTSAGOR). GÖR DET! DISKUTERA ÅTER SANNINGSVÄRDENA.

B3 DISKUTERA NÄR EN DISJUNKTION $A \vee B$ ÄR SANN RESP. FALSK I RELATION TILL OM A RESP. B ÄR SANNA ELLER FALSKA. **GÅ IGENOM ALLA MÖJLIGHETER.** SKRIV RESULTATET I EN TABELL

A	B	$A \vee B$
S	S	?
S	F	?
F	S	?
F	F	?

EN SÅDAN HÄR TABELL KALLAS EN SANNINGSTABELL

JÄMFÖR MED TALSPRÅKETS OLIKA TOLKNINGAR AV "ELLER"

B4 DISKUTERA NÄR EN KONJUNKTION $A \wedge B$, "A OCH B", ÄR SANN RESP. FALSK BEROENDE PÅ OM A RESP. B ÄR SANNA ELLER FALSKA. HITTA PÅ EGNA EXEMPEL! GÖR EN SANNINGSTABELL FÖR KONNEKTIVET "OCH", $\wedge$.

B5 UTSAGA (ix), $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$, ÄR EXEMPEL PÅ EN IMPLIKATION, DVS EN UTSAGA AV FORMEN $A \Rightarrow B$ (VILKET LÄSES "A MEDFÖR B" ALT. "OM A SÅ B").
ÄR UTSAGAN (ix) SANN FÖR ALLA REELLA TAL x?
TESTA UTSAGAN FÖR $x = 5$, $x = 2$ OCH $x = -4$.
ANTECKNA SANNINGSVÄRDENA FÖR "$x > 3$" OCH "$x^2 > 9$" I VARJE FALL.
HUR "MÅSTE" SANNINGSTABELLEN FÖR IMPLIKATION SE UT OM VI VILL ATT (ix) SKA VARA SANN FÖR ALLA REELLA TAL x? SKRIV UPP DEN!

B6 ANVÄND SANNINGSTABELLEN FÖR IMPLIKATION FÖR ATT AVGÖRA OM FÖLJANDE UTSAGOR ÄR SANNA ELLER FALSKA.

- $1 = 2 \Rightarrow 1 = 1$
- $1 = 2 \Rightarrow 0 = 1$
- $3 > 2 \Rightarrow 0 = 1$
- $3 > 2 \Rightarrow 1 = 1$

B7 NÄR ÄR EN EKVIVALENS, $A \Leftrightarrow B$, SANN RESP. FALSK **BEROENDE** PÅ OM A RESP. B ÄR SANNA ELLER FALSKA?
UTGÅ T.EX. FRÅN ATT UTSAGAN "$x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1$" SKA VARA SANN FÖR ALLA REELLA TAL x.
(TESTA UTSAGAN FÖR OLIKA VÄRDEN PÅ x!)
HUR SER SANNINGSTABELLEN FÖR EKVIVALENS UT?

B8 **VAD MENAS MED MOTSATSEN? VAD ÄR EN NEGATION?**

BETRAKTA UTSAGORNA

A: JAG DANSAR OCH JAG SJUNGER.

B: JAG ÄTER ELLER JAG SOVER. (SKALMAN!)

C: OM DET REGNAR HAR JAG MED MIG PARAPLYT.

FORMULERA NEGATIONEN AV UTSAGORNA.
SKRIV UTSAGORNA OCH DERAS NEGATIONER MED HJÄLP AV KONNEKTIV.

B9 FÖRSÖK FORMULERA ALLMÄNT HUR MAN NEGERAR UTSAGOR AV TYPEN

- $A \wedge B$
- $A \vee B$
- $A \Rightarrow B$

DVS. HUR KAN MAN UTTRYCKA $\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$ OCH $\neg(A \Rightarrow B)$?

B10 NEGERA UTSAGORNA

A: ALLA MÄNNISKOR TYCKER OM MATEMATIK.

B: DET FINNS (MINST) EN MATEMATIKER SOM INTE GILLAR KAFFE.

C: DET FINNS (MINST) EN STUDENT SOM KLARAR ALLA UPPGIFTERNA.

B11 FORMALISERA UTSAGORNA I B10 MED HJÄLP AV "FÖR ALLA" ($\forall$) OCH "DET FINNS" ($\exists$) KVANTORERNA.
GÖR SAMMA SAK FÖR UTSAGORNAS NEGATIONE[R]
VAD HÄNDER MED "$\forall$" RESP. "$\exists$" DÅ EN UTSAG[A] NEGERAS?

B12 LÅT $K(x,u)$ BETECKNA "x KLARAR u", DÄR x BETECKNAR EN STUDENT OCH u EN UPPGIFT.
DÅ KAN UTSAGA C I B10 FORMALISERAS SÅ HÄR

$$\exists x : \forall u : K(x,u)$$

OM VI BYTER ORDNING PÅ KVANTORERNA FÅR VI EN NY UTSAGA:

$$\forall u : \exists x : K(x,u)$$

SKRIV MED VANLIGA ORD VAD DENNA UTSAGA SÄGER.

B13 FÖRKLARA MED HJÄLP AV OBSERVATIONEN I B12 FÖLJANDE MISSFÖRSTÅND:

– I LONDON BLIR EN PERSON ÖVERKÖRD VARJE HALVTIMME.

– STACKARS SATE.

B14 NEGERA UTSAGORNA I B12.

B15. a) ANTAG ATT x OCH y ÄR REELLA TAL.
VILKA AV FÖLJANDE UTSAGOR ÄR SANNA?

(i) $\forall x \forall y : \; x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

(ii) $\forall x \forall y : \; x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

(iii) $\forall x \forall y : \; x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

(iv) $\forall x \forall y : \; x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

b) VILKA ÄR FALSKA? HUR VISAR MAN DET?

c) DISKUTERA VAD ETT MOTEXEMPEL ÄR OCH DESS ANVÄNDBARHET.

d) BYT UT KVANTORERNA I DE FALSKA UTSAGORNA I a) SÅ ATT DE ISTÄLLET BLIR SANNA UTSAGOR.

B16 GÖR FÖLJANDE ÖVNINGAR I VRETBLAD: ~~1.9~~ 1.12, ~~1.11~~ 1.15, ~~1.12~~ 1.18, ~~1.14~~ 1.23, ~~1.15~~ 1.24, ~~1.16~~ 1.26, ~~1.18~~ 1.28, ~~1.59~~ 1.85

OCH GÄRNA ÄVEN: 1.14, 1.16, 1.22, 1.25, 1.32, 1.33

B17 **VAD ÄR EN EKVATION?**

HUR LÖSER MAN EKVATIONER?

GÖR FÖLJANDE ÖVNINGAR I VRETBLAD:
~~1.35~~ 1.36 ab, ~~1.26~~ 1.38 bd, ~~1.49~~ 1.75, ~~1.50~~ 1.76

TÄNK HELA TIDEN PÅ VILKA LOGISKA KRAV SOM ÄR AKTUELLA!

C. MÄNGDER

SYFTET MED ÖVNINGEN ÄR ATT INTRODUCERA NÅGRA VIKTIGA BEGREPP I MÄNGDLÄRAN. DESSA BEGREPP FÖREKOMMER MYCKET OFTA DÅ MAN FORMULERAR MATEMATISKA PÅSTÅENDEN.

DE ÄR:

- MÄNGDER OCH DERAS ELEMENT
- TILLHÖR ($\in$) OCH INKLUSION ($\subseteq$)
- MÄNGDOPERATIONER: UNION, SNITT, DIFFERENS, KOMPLEMENT
- VENN-DIAGRAM

C1. VAD ÄR EN MÄNGD?

VAD BETYDER DET ATT TVÅ MÄNGDER ÄR LIKA? FÖRSÖK FORMULERA DET SOM EN LOGISK UTSAGA.

C2. BETRAKTA UTSAGAN

$$\forall x : x \in N \Rightarrow x \in M$$

RITA ETT VENN-DIAGRAM SOM ILLUSTRERAR INNEBÖRDEN I UTSAGAN.
UTTRYCK UTSAGAN ENBART MED MÄNGDLÄRANS BETECKNINGAR (DVS UTAN $\forall$, $\Rightarrow$ OSV)

C3. GÖR ÖVN. ~~1.27~~ 1.41, ~~1.29~~ 1.44, ~~1.31~~ 1.48   1.42, 1.45, 1.46

C4 DISKUTERA HUR DE LOGISKA KONNEKTIVEN ANVÄNDES FÖR ATT BESKRIVA MÄNGDOPERATIONER. VILKA KONNEKTIV SVARAR MOT VILKA MÄNGDOPERATIONER? HUR ÄR DET MED NEGATIONEN?

C5 GÖR ÖVN. ~~1.34~~ 1.54, ~~1.35~~ 1.55, ~~1.36~~ 1.56   1.51, 1.52, 1.53
HUR SER "DE MORGANS LAGAR" UT FÖR MÄNGDER? (JFR. ÖVN. ~~1.16~~ 1.26)

C6 GÖR ÖVN. ~~1.39~~ 1.60, ~~1.41~~ 1.62, ~~1.44~~ 1.68, ~~1.45~~ 1.69, ~~1.52~~ 1.78.   1.65, 1.66