ÖVNING 2

OM INDUKTION & REKURSION

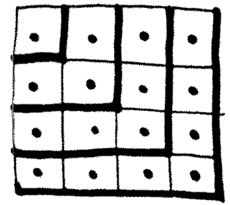
ÖVNINGENS SYFTE ÄR

- ATT ÖVA FÖRMÅGAN ATT UTGÅENDE FRÅN ENKLA SAMBAND — ARITMETISKA OCH GEOMETRISKA — SE MÖNSTER SOM KAN GENERALISERAS TILL ALLMÄNNA PÅSTÅENDEN. DETTA KAN GÖRAS UTAN ATT TITTA I BOKEN!
- ATT ÖVA SIG I ATT GENOMFÖRA KORREKTA MATEMATISKA RESONEMANG SOM VISAR DESSA ALLMÄNNA PÅSTÅENDEN. SPECIELLT ATT GÖRA DETTA MED <u>MATEMATISK INDUKTION</u>
- ATT SE ATT VISSA AV DESSA MÖNSTER HAR EN <u>REKURSIV KARAKTÄR</u>.

A1 a) KAN DU FORTSÄTTA FÖLJDEN $1, 3, 5, 7, \ldots$?
VILKET ÄR DET 7:E TALET ?
VILKET ÄR TAL NR 1238 ?
VILKET ÄR TAL NR n? KAN DU GE EN FORMEL FÖR TAL NR n ?

b) DET ÄR LÄTT ATT SE ATT

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$



KAN DU SKRIVA UPP ETT ALLMÄNT PÅSTÅENDE MED n STYCKEN TERMER I VÄNSTER LED? VAD STÅR I SÅ FALL I HÖGERLEDET ?

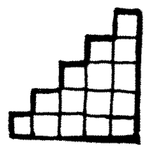
KAN DU TOLKA SIFFERIDENTITETERNA GEOMETRISKT ? SE FIGUR.

KAN DU BEVISA PÅSTÅENDET ?

A2 a) BETRAKTA SUMMAN AV DE 5 FÖRSTA POSITIVA HELTALEN

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

KAN DU GE EN ENKEL FORMEL FÖR DENNA SUMMA GENOM ATT BETRAKTA FIGUREN



LEDNING:

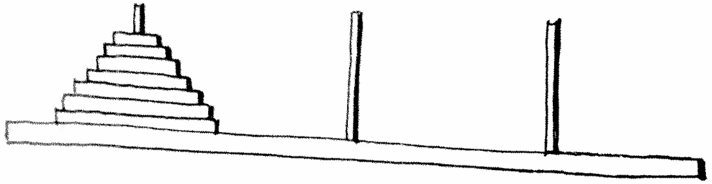
VAD HÄNDER OM DU GÖR TVÅ SÅDANA FIGURER OCH LÄGGER IHOP DEM?

b) KAN DU GE EN FORMEL FÖR SUMMAN AV DE n STYCKEN FÖRSTA POSITIVA HELTALEN?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = ?$$

KAN DU BEVISA FORMELN ?

A3 "TORNEN I HANOI"



PÅ EN PLATTA MED 3 PINNAR SITTER n STYCKEN SKIVOR MED MINSKANDE DIAMETER PÅ EN AV PINNARNA (HÄR $n=7$). PROBLEMET BESTÅR I ATT FLYTTA ALLA SKIVORNA TILL EN ANNAN PINNE. MAN FÅR BARA FLYTTA EN SKIVA ÅT GÅNGEN OCH MAN FÅR ALDRIG SÄTTA EN STÖRRE SKIVA PÅ EN MINDRE.

a) LÖS PROBLEMET FÖR 7 SKIVOR. DET RÄCKER ATT HA SJU FÖREMÅL AV OLIKA STORLEKAR, ELLER NUMRERADE PAPPERSLAPPAR.

b) VILKET ÄR DET MINSTA ANTALET DRAG SOM BEHÖVS FÖR $n=1,2,3,\ldots,7$?

c) KAN DU BEVISA ATT DET GÅR ATT LÖSA PROBLEMET FÖR VILKET n SOM HELST?

d) VILKET ÄR DET MINSTA ANTALET DRAG SOM BEHÖVS FÖR n SKIVOR ?

A4

I BOKEN "RÄKNERESAN" FÖR ÅK 5 I GRUNDSKOLAN FINNS FÖLJANDE PROBLEM:

12 SJÖRÖVARE HAR EN FEST DÄR ALLA I BÖRJAN AV FESTEN HÄLSAR PÅ VARANDRA. HUR MÅNGA HANDSKAKNINGAR BLIR DET ?

- LÖS UPPGIFTEN OCH TÄNK EFTER HUR DU TÄNKTE. FRÅGA DE ANDRA I 4-GRUPPEN HUR DE TÄNKTE, MEN TÄNK SJÄLV FÖRST! KAN MAN TÄNKA PÅ FLERA SÄTT ? KAN DU TÄNKA UT ETT SÄTT SOM ANVÄNDER ENBART ADDITION OCH ETT SÄTT SOM ANVÄNDER ENBART MULTIPLIKATION ?

DESSA TVÅ SÄTT MÅSTE JU GE SAMMA SVAR. VILKEN AV FORMLERNA I DET FÖREGÅENDE HAR MED DETTA ATT GÖRA ?

- LÖS UPPGIFTEN MED 125 STUDENTER PÅ FEST.
- GENERALISERA UPPGIFTEN TILL ETT GODTYCKLIGT ANTAL SJÖRÖVARE/STUDENTER VILKEN AV DE FORMLER SOM NI VISAT (?) **I A1-3** KAN DU BEVISA GENOM ATT LÖSA ALLMÄNNA FALLET MED ADDITION RESP. MULTIPLIKATION ?

NI HAR NU HITTAT FORMLER FÖR SUMMAN AV DE n STYCKEN FÖRSTA POSITIVA HELTALEN OCH SUMMAN AV DE n STYCKEN FÖRSTA UDDA POSITIVA HELTALEN.

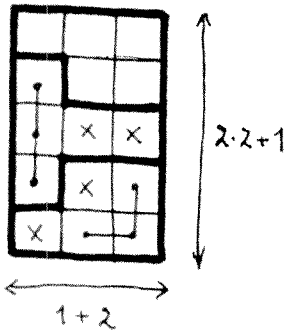
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

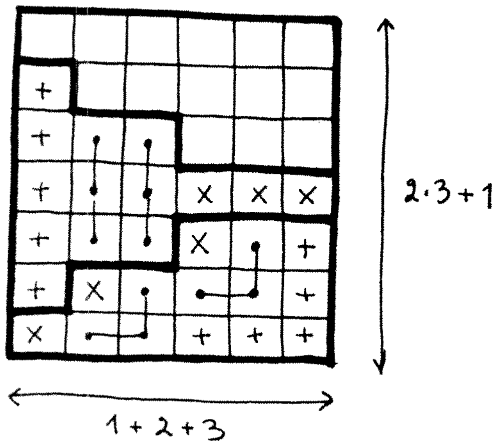
BETYDLIGT SVÅRARE ATT FINNA ÄR EN FORMEL FÖR SUMMAN AV DE n STYCKEN FÖRSTA KVADRATERNA

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = ?$$

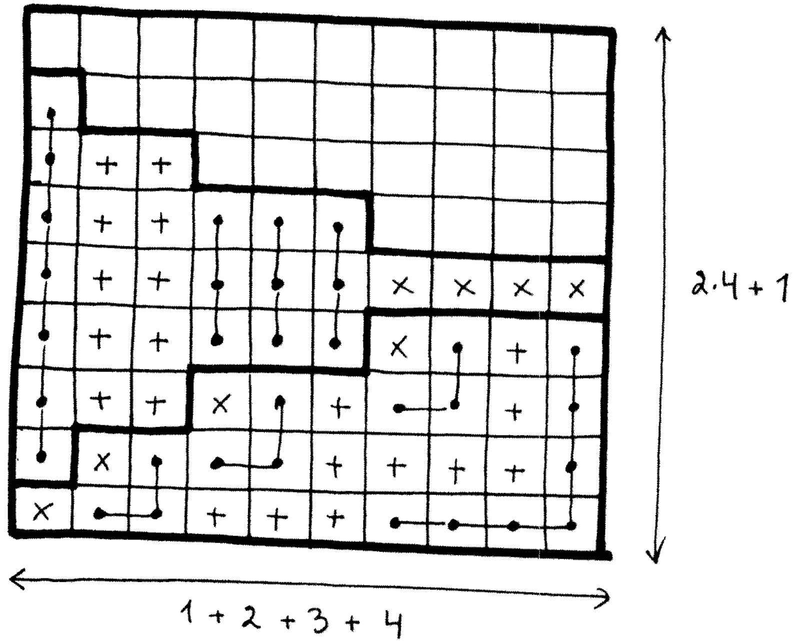
BABYLONIERNA (3-4 TUSEN ÅR SEDAN) LYCKADES HITTA EN FORMEL GENOM ATT TITTA PÅ FÖLJANDE FIGURER



$$\boxed{1^2+2^2=?}$$



$$\boxed{1^2+2^2+3^2=?}$$



$$\boxed{1^2+2^2+3^2+4^2=?}$$

AS KAN DU UR DESSA FIGURER FINNA EN FORMEL FÖR

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = ?$$

VARFÖR SKULLE FORMELN VARA SANN?
HUR SKULLE MAN KUNNA VISA DET?

HUR VISAR MAN ATT EN ÖPPEN UTSAGA $P(n)$ ÄR SANN FÖR ALLA NATURLIGA TAL n ?

ELLER MERA GENERELLT

HUR VISAR MAN ATT EN ÖPPEN UTSAGA $P(x)$ ÄR SANN FÖR ALLA "VÄRDEN" PÅ VARIABELN x DÄR x TILLHÖR EN VISS GRUNDMÄNGD M ?

DET FINNS EN GENERELL LOGISK METOD SOM ALLTID KAN ANVÄNDAS OBEROENDE AV MÄNGDEN M OCH DET FINNS EN SPECIELL (OFTA EFFEKTIV) METOD FÖR ÖPPNA UTSAGOR $P(n)$ DÄR n ÄR ETT NATURLIGT TAL, dvs. $M=\mathbb{N}$. DEN SISTA KALLAS MATEMATISK INDUKTION.

ALT 1. GENERELLA METODEN

OM MAN VILL VISA ATT $P(x)$ ÄR SANT FÖR ALLA $x \in M$ KAN MAN GÖRA SÅ HÄR:

(1) TAG $x \in M$ HELT GODTYCKLIGT

(2) VISA ATT $P(x)$ ÄR SANT FÖR DETTA x

(3) DRAG SLUTSATSEN ATT $P(x)$ ÄR SANT FÖR ALLA $x \in M$.

DETTA KAN VI SKRIVA:

(1) TAG $x \in M$
(2) VISA $P(x)$

---

(3) $\because \ \forall x \in M : P(x)$

ALT 2. MATEMATISK INDUKTION

OM MAN VILL VISA ATT $P(n)$ ÄR SANT FÖR ALLA $n = 1, 2, 3, \ldots$ KAN MAN GÖRA SÅ HÄR:

(1) VISA ATT $P(1)$ ÄR SANT

(2) VISA ATT OM $P(k)$ ÄR SANT SÅ ÄR OCKSÅ $P(k+1)$ SANT, FÖR GODTYCKLIGT $k \geq 1$.

(3) DRAG SLUTSATSEN ATT $P(n)$ ÄR SANT FÖR ALLA $n = 1, 2, 3, \ldots$

DETTA KAN SKRIVAS:

(1) VISA $P(1)$
(2) VISA IMPLIKATIONEN $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ FÖR $k \geq 1$

---

(3) $\because$ $P(n)$ ÄR SANT FÖR ALLA $n = 1, 2, \ldots$

B1 TÄNK IGENOM OCH DISKUTERA DESSA METODER. VARFÖR ÄR DE RIKTIGA? VAD ÄR DET FÖR SKILLNAD MELLAN DEM?

B2 a) FORMULERA ERA RESULTAT FRÅN ÖVN. A1-A5 SOM OLIKA PÅSTÅENDEN $P(n)$ DÄR $n = 1, 2, 3, \dots$

b) FÖRSÖK VISA ERA PÅSTÅENDEN MED DEN GENERELLA METODEN. VILKA KLARAR NI? (SKRIV BEVIS!)

c) BEVISA ALLA ERA PÅSTÅENDEN MED INDUKTION. NI HAR KANSKE REDAN ANVÄNT INDUKTION – ÖPPET ELLER DOLT – I ERA TIDIGARE RESONEMANG KRING A1-A5. DISKUTERA!

Kalle och Hobbe

B3 HUR VISAR MAN ATT EN ÖPPEN UTSAGA $P(x)$ INTE ÄR SANN FÖR ALLA $x \in M$?
HITTA PÅ ETT EXEMPEL MED EN UTSAGA $P(x)$ OCH EN MÄNGD M SÅ ATT UTSAGAN

$$\forall x \in M : P(x)$$

ÄR FALSK. BEVISA ATT DEN ÄR FALSK.

B4 SKRIV ALLA SUMMOR DU STÖTT PÅ MED HJÄLP AV SUMMASYMBOLEN Σ. (SE VRETBLAD). DISKUTERA VÄRDET AV Σ-SYMBOLEN. FÖR/EMOT?
GÖR ÖVN. ~~4.1–4.5~~, ~~4.7~~ I VRETBLAD.
4.2, 4.4–4.7, 4.9–4.11, 4.13

B5 LÄS I VRETBLAD, AVSN. 4.2, OM INDUKTIONSPRINCIPEN, ÄVEN VERSION 2.
TROR DU PÅ DEN? VARFÖR/VARFÖR INTE?
GÖR ÖVN. ~~4.10~~, ~~4.12~~, ~~4.13~~
4.16, 4.20, 4.22, 4.23

B6 FÖR VILKA n GÄLLER FÖLJANDE OLIKHETER

a) $2^n > n^3$

b) $n! < n^n$

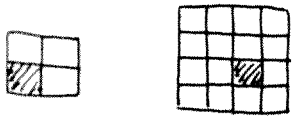
BEVISA!

B7 LÅT $P(n)$ VARA PÅSTÅENDET

$$2+4+\ldots+2n = \frac{1}{8}+n+n^2$$

VISA ATT OM $P(k)$ ÄR SANT FÖR ETT NATURLIGT TAL k, SÅ ÄR ÄVEN $P(k+1)$ SANT. FÖLJER DET ATT $P(n)$ ÄR SANT FÖR ALLA n?

B8 TÄNK ER EN "SCHACKBRÄDA" MED $2^n \times 2^n$ RUTOR, DÄR MAN HAR TAGIT BORT EN AV RUTORNA.



$n=1$ $n=2$ . . .

VISA ATT MAN KAN TÄCKA EN SÅDAN BRÄDA FULLSTÄNDIGT MED BITAR AV FORMEN  SOM INTE ÖVERLAPPAR VARANDRA.

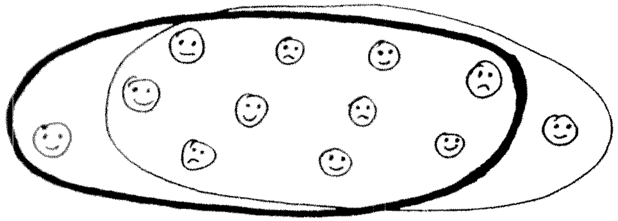
C1 BETRAKTA TALFÖLJDEN 1, 3, 6, 10, 15, ...
KAN DU SKRIVA UT NÅGRA EFTERFÖLJANDE TAL?
LÅT a_n BETECKNA DET n:TE TALET I FÖLJDEN DVS. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ OSV.
ANGE SAMBANDET MELLAN a_{n+1} OCH a_n FÖR $n = 1, 2, 3, \ldots$

C2 LÄS I VRETBLAD OM REKURSION.
HAR NI STÖTT PÅ NÅGON REKURSIONSFORMEL I SAMBAND MED ÖVN. A1–A5?
GÖR ÖVN. ~~4.25~~, ~~4.27~~, ~~4.28~~ 4.42, 4.44, 4.45, 4.37, 4.41

ÄNNU MERA INDUKTION . . .

D1 FÖRSÖK FINNA ETT FEL I FÖLJANDE "INDUKTIONSBEVIS". VI PÅSTÅR ATT ALLA MÄNNISKOR HAR SAMMA ÖGONFÄRG.
PÅSTÅENDET ÄR SJÄLVKLART SANT OM ANTALET MÄNNISKOR n ÄR LIKA MED 1.
ANTAG ATT PÅSTÅENDET ÄR SANT FÖR ANTALET MÄNNISKOR LIKA MED k, DVS.

ANTAG ATT FÖR VARJE MÄNGD MED k STYCKEN MÄNNISKOR GÄLLER ATT ALLA HAR SAMMA ÖGONFÄRG. BETRAKTA NU EN MÄNGD MED $k+1$ MÄNNISKOR:



MED DEN TJOCKA LINJEN HAR VI RINGAT IN ALLA UTOM EN, DVS. k ST MÄNNISKOR. ENLIGT INDUKTIONSANTAGANDET HAR DESSA k MÄNNISKOR SAMMA ÖGONFÄRG. SAMMA SAK GÄLLER FÖRSTÅS OM VI UTESLUTER EN ANNAN MÄNNISKA SOM VI GJORT MED DEN TUNNA LINJEN. NU HAR VI $k-1$ PERSONER I MITTEN AV FIGUREN INNANFÖR BÅDE DEN TJOCKA OCH TUNNA LINJEN. PERSONEN LÄNGST TILL VÄNSTER HAR SAMMA ÖGONFÄRG SOM DE I MITTEN, SOM I SIN TUR HAR SAMMA ÖGONFÄRG SOM PERSONEN LÄNGST TILL HÖGER. ALLTSÅ HAR ALLA $k+1$ PERSONERNA SAMMA ÖGONFÄRG. ENLIGT INDUKTIONSPRINCIPEN HAR ALLA MÄNNISKOR SAMMA ÖGONFÄRG.

D2 VISA ATT OM MAN DRAR n STYCKEN RÄTA LINJER I PLANET SÅ ATT INGA TVÅ ÄR PARALLELLA OCH INGA TRE MÖTS I EN PUNKT, SÅ DELAR DESSA LINJER UPP PLANET I $\frac{n^2+n}{2}+1$ OMRÅDEN. (FÖR VILKA n?)

D3 GÖR ÖVN. ~~4.20~~, ~~4.21~~, ~~4.29~~, ~~4.30~~, ~~4.33~~, ~~4.34~~
4,33, 4,34, 4,46, 4.47, 4.50, 4.51

D4 NI HAR (?) TIDIGARE VISAT ATT

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

FÖRSÖK HITTA EN FORMEL FÖR $\sum_{k=1}^{n} k^3$ GENOM ATT UNDERSÖKA NÅGRA n-VÄRDEN; BEVISA FORMELN!

D5 MAN KAN VISA EN FORMEL FÖR $\sum_{k=1}^{n} k^3$ GENOM ATT BETRAKTA $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4$ OCH UTNYTTJA ATT MAN KÄNNER TILL SUMMOR AV LÄGRE POTENSER. FÖRSÖK GÖRA DETTA. KAN DU GENERALISERA?

D6 VISA ATT $(1+x)^n > 1+nx$ FÖR ALLA $x > -1$, $x \neq 0$ OCH FÖR ALLA $n = 2, 3, \ldots$