ÖVNING 4
OM FUNKTIONER & RELATIONER

ÖVNINGENS SYFTE ÄR ATT UTFORSKA TVÅ AV MATEMATIKENS VIKTIGASTE BEGREPP – FUNKTION OCH RELATION – OCH SAMBANDET MELLAN DESSA.

DU HAR REDAN STÖTT PÅ DESSA BEGREPP PÅ OLIKA SÄTT I SKOLAN. DET ÄR VIKTIGT HÄR ATT TA REDA PÅ VAD DU HAR FÖR ERFARENHET AV DESSA BEGREPP OCH ATT UTGÅENDE FRÅN DINA UPPFATTNINGAR ÖKA PRECISIONEN OCH KLARHETEN AV VAD SOM MENAS MED DE OLIKA BEGREPPEN.

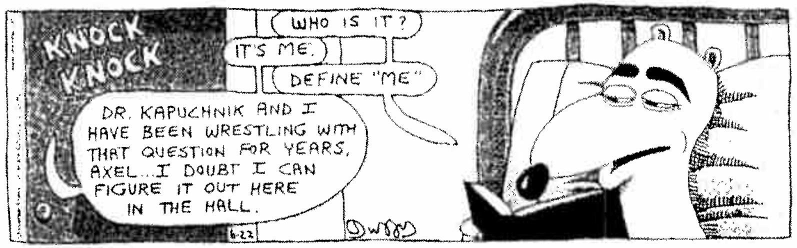
DE VIKTIGASTE BEGREPPEN ÄR:

- FUNKTION
- DEFINITIONSMÄNGD & VÄRDEMÄNGD
- INJEKTIV, SURJEKTIV, BIJEKTIV
- INVERS FUNKTION, INVERTERBARHET
- GRAF, FUNKTIONSKURVA
- RELATION
- EKVIVALENSRELATION
- EKVIVALENSKLASS, PARTITION

A1 VAD ÄR EN FUNKTION?

VAD TÄNKER DU ATT EN FUNKTION ÄR?

KAN DU DEFINIERA BEGREPPET FUNKTION?



VAD ÄR EN FUNKTIONS DEFINITIONSMÄNGD?
" " " " VÄRDEMÄNGD?

HITTA PÅ EXEMPEL PÅ FUNKTIONER SOM HAR

a) DEFINITIONSMÄNGD $\{1,2\}$, VÄRDEMÄNGD $\{3\}$
b) —— " —— $\{1,2\}$, —— " —— $\{3,4\}$
c) —— " —— $\{1,2\}$, —— " —— $\{3,4,5\}$
d) —— " —— $[0,1]$, —— " —— $\{1,2\}$
e) —— " —— $[0,1]$, —— " —— $[0,1]$
f) —— " —— $[0,1]$, —— " —— $]0,1[$
g) —— " —— $\mathbb{Z}$, —— " —— $\mathbb{N}$
h) —— " —— $\mathbb{N}$, —— " —— $\mathbb{Z}$
i) —— " —— $\mathbb{R}$, —— " —— $\mathbb{Z}$

A2 HUR MÅNGA FUNKTIONER MED EGENSKAPEN I

a), b) RESP. c) OVAN FINNS DET?

HUR MÅNGA FUNKTIONER FRÅN $\{1,2\}$ TILL

A3 VAD ÄR DET FÖR LIKHETER / SKILLNADER MELLAN FÖLJANDE FUNKTIONER ?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$

$h : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $h(t) = t^2$

VAD ÄR $f(x+1)$, $g(-x)$, $g(x^2)$, $h(x-1)$? FÖR VILKA x ?

A4 VAD ÄR <u>SAMMANSÄTTNINGEN</u> AV TVÅ FUNKTIONER ?

LÅT $f(x) = \frac{1}{x}$ OCH $g(x) = -(x+1)$ MED $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$.

VAD ÄR VÄRDEMÄNGDERNA V_f OCH V_g ?

VAD ÄR $f \circ g$ RESP. $g \circ f$? ÄR DE LIKA ?

VAD HÄNDER OM VI SÄTTER $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$?

B1 VAD ÄR EN <u>GRAF</u> ?

RITA GRAFERNA TILL FUNKTIONERNA I A1, A3, A4.
HAR NÅGON AV FUNKTIONERNA EN <u>INVERS</u> ?
VARFÖR / VARFÖR INTE ? VAD ÄR EN INVERS ?
BESTÄM INVERSEN I DE FALL DEN FINNS !

VILKEN EGENSKAP ÄR GEMENSAM FÖR ALLA FUNKTIONER SOM HAR INVERS ?

B2 VAD ÄR EN <u>INJEKTIV</u> FUNKTION ?
VAD ÄR EN <u>SURJEKTIV</u> FUNKTION ?

GE EXEMPEL PÅ EN FUNKTION SOM ÄR

a) INJEKTIV MEN INTE SURJEKTIV
b) SURJEKTIV MEN INTE INJEKTIV
c) BÅDE INJEKTIV OCH SURJEKTIV (VAD KALLAS DET?
d) VARKEN SURJEKTIV ELLER INJEKTIV

B3 AV DINA EXEMPEL I B2 ÄR <u>PRECIS EN</u> FUNKTION INVERTERBAR , VILKEN ? RITA FUNKTIONENS OCH DESS INVERS' GRAF I SAMMA KOORDINATSYSTEM . VAD SER DU ?

B4 LÅT $f(x) = |x|$ OCH $g(x) = x^2$ MED $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

VISA ATT $f \circ g = g \circ f = g$.

VAD ÄR FEL I FÖLJANDE HÄRLEDNING

$$f(x) = f \circ (g \circ g^{-1})(x) = (f \circ g) \circ g^{-1}(x) = g \circ g^{-1}(x) = x \quad ?$$

B5 GÖR ÖVN. 3.3 , 3.4 , 3.6 , 3.7 , 3.8

C1 VAD ÄR CARTESISKA PRODUKTEN , $A \times B$, AV TVÅ MÄNGDER A OCH B ? BESKRIV FÖLJANDE MÄNGDER MED HJÄLP AV MÄNGDKLAMRAR SAMT RITA DEM I EN FIGUR

a) $\{-1,0\} \times \{2,3\}$
b) $\{1,2\} \times \mathbb{N}$
c) $\{1,2\} \times \mathbb{Q}$
d) $\{1,2\} \times \mathbb{R}$
e) $[0,1] \times]0,1]$

GÖR ÖVN. 3.2

C2 LÄS I BOKEN HUR EN FUNKTIONS GRAF DEFINIERAS. JÄMFÖR MED ER/DIN BESKRIVNING AV GRAF.

VAD ÄR EN <u>RELATION</u>?

HUR KAN EN FUNKTION BETRAKTAS SOM EN RELATION?

GE EXEMPEL PÅ RELATIONER, SOM INTE ÄR FUNKTIONER

a) FRÅN $\mathbb{Z}$ TILL $\mathbb{Z}$
b) FRÅN $\mathbb{R}$ TILL $\mathbb{R}$
c) FRÅN $\mathbb{R}$ TILL $\mathbb{Z}$

C3 BETRAKTA DE TVÅ RELATIONERNA $\leq$ OCH $<$ PÅ $\mathbb{R}$. SKISSA RELATIONERNA (SOM DELMÄNGDER AV PLANET) OCH JÄMFÖR. VAD ÄR SKILLNADEN? KAN NI BESKRIVA DEN EGENSKAP SOM $\leq$ HAR MEN INTE $<$ HAR, I MATEMATISKA TERMER, UTAN ATT REFERERA TILL SKISSERNA?

C4 NU SKALL NI JÄMFÖRA TVÅ RELATIONER PÅ $M = \{$MÄNNISKOR PÅ JORDEN$\}$. DEN FÖRSTA ÄR GIVEN AV ATT EN PERSON A ÄR RELATERAD TILL B OM A ÄR YNGRE ÄN B. DEN ANDRA RELATIONEN GES AV ATT A ÄR RELATERAD TILL B OM DE ÄR SYSKON. KAN NI HITTA NÅGON EGENSKAP SOM DEN ANDRA RELATIONEN HAR MEN INTE DEN FÖRSTA? KAN NI BESKRIVA DENNA EGENSKAP I MATEMATISKA TERMER?

C5 DÅ $3<5$ OCH $5<x$ KAN MAN DRA EN "SJÄLVKLAR" SLUTSATS. VILKEN?
VAD ÄR DET FÖR EN EGENSKAP SOM EN RELATION DEHÖVER HA FÖR ATT MAN SKALL KUNNA DRA EN SÅDAN SLUTSATS? SKRIV NER EN DEFINITION AV DEN.

C6 I UPPGIFTERNA C3,4,5 FANN NI TRE EGENSKAPER SOM EN RELATION KAN HA. LÄS NU I BOKEN OM REFLEXIVITET, SYMMETRI OCH TRANSITIVITET. VAR DET DESSA EGENSKAPER NI FANN? OM INTE, DISKUTERA GÄRNA MED HANDLEDAREN VAD NI FANN.

C7 HITTA PÅ EXEMPEL PÅ RELATIONER MED OLIKA EGENSKAPER; FYLL I EN TABELL ENL. NEDAN DÄR VARJE MÖJLIG KOMBINATION AV ja OCH nej SKA INGÅ.

REFLEXIV	SYMMETRISK	TRANSITIV	EX. PÅ RELATION
Ja	Ja	Ja	?
Ja	Ja	Nej	?
⋮	⋮	⋮	⋮

C8. VAD ÄR EN EKVIVALENSRELATION

GÖR ÖVN. 3.9, ~~3.26~~, ~~3.32~~
3.35, 3.41

AV EN MÄNGD M ÄR EN UPPDELNING AV ALLA ELEMENT TILLHÖRANDE M I PARVIS DISJUNKTA DELMÄNGDER.

GE EXEMPEL PÅ PARTITIONER AV MÄNGDERNA:

$\{1,2,3\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$

HUR MÅNGA PARTITIONER AV $\{1,2,3\}$ FINNS DET?

C10 BEGREPPEN EKVIVALENSRELATION OCH PARTITION ÄR TÄTT FÖRKNIPPADE. UNDERSÖK DETTA GENOM ATT BESVARA FÖLJANDE TVÅ FRÅGOR. OM MAN HAR EN PARTITION, HUR KAN MAN DÅ FÅ EN EKVIVALENSRELATION? OMVÄNT, HUR GER EN EKVIVALENSRELATION EN PARTITION?

C11 VAD ÄR EN EKVIVALENSKLASS?

VAD SÄGER SATS 3.10?

HAR NI BEVISAT DEN I C10?

GÖR ÖVN. 3.10, 3.13

C12 VISA ATT RELATIONEN "$x \sim y$ OMM $4 \mid x-y$" ÄR EN EKVIVALENSRELATION PÅ $\mathbb{Z}$. BESKRIV EKVIVALENSKLASSERNA! GENERALISERA EXEMPLET GENOM ATT ERSÄTTA 4 MED ETT GODTYCKLIGT (FIXT) POSITIVT HELTAL n. DETTA ÄR ETT VIKTIGT EXEMPEL OCH RELATIONEN BRUKAR SKRIVAS $x \equiv y \pmod{n}$. SE BOKE BESKRIV EKVIVALENSKLASSERNA FÖR $n=1,2,$ HUR SER EKVIVALENSKLASSERNA UT I ALLMÄNHET?

C13 I SATS 3.11 GES RÄKNEREGLER FÖR RÄKNING MED KONGRUENSER. FÖRSÖK BEVIS DEM!

GÖR ÖVN. 3.15, 3.16, 3.24 | 3.21 ~~3.15~~, 3.26 ~~3.17~~, 3.27 ~~3.18~~, 3.29 ~~3.20~~, 3.30 ~~3.21~~, 3.31 ~~3.22~~, 3.36 ~~3.27~~, 3.37 ~~3.28~~, 3.38 ~~3.29~~, 3.39 ~~3.30~~

TÄNK EFTER VILKA RÄKNEREGLER DU ANVÄNDER!

EXTRAUPPGIFTER FÖR DEN HÅGADE

D1 VISA ATT FÖLJANDE RÄKNEREGEL INTE GÄLLER:

$$cx \equiv cy \pmod{n} \Rightarrow x \equiv y \pmod{n}$$

GÖR ÖVN. ~~3.19~~ 3.28

D2 BESTÄM SISTA SIFFRAN I TALEN.

a) 2^{1999}

b) 13^{20}

c) $7^{7^{7^7}}$

D3 ÄR REFLEXIVITETEN ÖVERFLÖDIG I DEFINITIONEN AV EKVIVALENSRELATION ? TITTA PÅ FÖLJANDE "BEVIS" AV ATT SYMMETRI OCH TRANSITIVITET MEDFÖR REFLEXIVITET :

TAG a OCH b SÅ ATT aRb GÄLLER. SYMMETRIN GER DÅ bRa. VI HAR NU aRb OCH bRa VARFÖR TRANSITIVITETEN GER aRa.

VAD BEVISAR DETTA RESONEMANG ?

VAD ÄR EN OÄNDLIG MÄNGD? HAR ALLA OÄNDLIGA MÄNGDER LIKA MÅNGA ELEMENT ?

LÅT OSS DISKUTERA DESSA FRÅGOR LITE GRAND. I DETTA SAMMANHANG ÄR FUNKTIONSBEGREPPET AV CENTRAL BETYDELSE !

HAR DU ONT OM TID SÅ GÖR BARA T.O.M. UPPGIFT E4.

FÖR EN ÄNDLIG MÄNGD KAN VI TALA OM HUR MÅNGA ELEMENT DEN HAR GENOM ATT HELT ENKELT RÄKNA DEM. T.EX. HAR MÄNGDEN $A = \{x, y, z\}$ TRE ELEMENT; VI SÄGER ATT MÄNGDENS KARDINALITET ÄR TRE, VILKET KAN SKRIVAS $\#(A) = 3$.

FÖR OÄNDLIGA MÄNGDER, SOM T.EX. $\mathbb{N}$ OCH $\mathbb{R}$, ÄR DET INTE LIKA ENKELT ATT TALA OM "HUR MÅNGA" ELEMENT DE HAR, ELLER VAD "HUR MÅNGA" SKA BETYDA. (DET ÄR FAKTISKT GANSKA SVÅRT OCH TAS UPP I KURSER I AXIOMATISK MÄNGDTEORI.) VI SKA HÄR BARA DISKUTERA VAD DET INNEBÄR ATT TVÅ MÄNGDER HAR "LIKA MÅNGA" ELEMENT

DEF: MAN SÄGER ATT TVÅ MÄNGDER A OCH B HAR SAMMA KARDINALITET OM DET FINNS EN BIJEKTIV FUNKTION $f: A \to B$.

E1 VISA ATT OM DET FINNS EN BIJEKTV FUNKTION $f: A \to B$ SÅ FINNS DET OCKSÅ EN BIJEKTIV FUNKTION $g: B \to A$. VAD HAR DETTA FÖR BETYDELSE FÖR DEFINITIONEN OVAN? JFR. ÖVN ~~3.26~~ 3.35

E2 VISA ATT MÄNGDERNA $\{x, y, z\}$ OCH $\{5, 6, 7\}$ HAR SAMMA KARDINALITET ENLIGT DEFINITIONEN.

E3 FÖR ÄNDLIGA MÄNGDER A OCH B INNEBÄR "SAMMA KARDINALITET" SAMMA SAK SOM DET VI INTUITIVT MENAR MED "LIKA MÅNGA ELEMENT". TÄNK IGENOM DETTA!

E4 LÅT $A = \mathbb{Z}$ OCH $B = \{2n \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. VISA ATT A OCH B HAR SAMMA KARDINALITET, DVS. DET FINNS LIKA MÅNGA JÄMNA TAL SOM DET FINNS HELTAL.

E6 a) VISA ATT INTERVALLEN $[0,1]$ OCH $[2,5]$ HAR SAMMA KARDINALITET. KAN DU GENERALISERA DETTA?

b) VISA ATT $]0,1[$ OCH $]0,\infty[$ HAR SAMMA KARDINALITET.

c) (SVÅR) VISA ATT $]0,1[$ OCH $[0,1]$ HAR SAMMA KARDINALITET. (GÖR EV. EFTER E9)

E7 VISA ATT $\mathbb{N}$ OCH $\mathbb{Z}$ HAR SAMMA KARDINALITET.

DEF: EN MÄNGD SOM HAR SAMMA KARDINALITET SOM $\mathbb{N}$ KALLAS UPPRÄKNELIG. ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$)

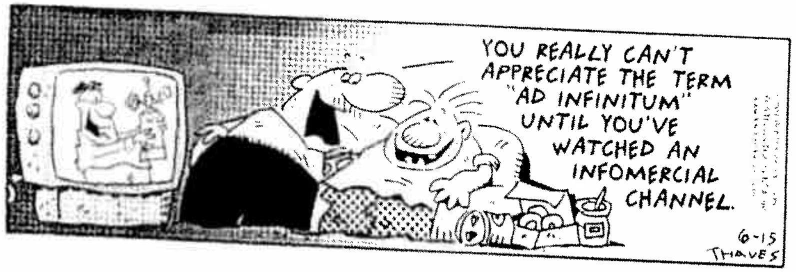
FÖR EN UPPRÄKNELIG MÄNGD A KAN MAN ORDNA ("RÄKNA UPP") ELEMENTEN I EN FÖLJD $a_1, a_2, a_3, \ldots$ GENOM ATT LÅTA $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ... OSV. DÄR $f: \mathbb{N} \to A$ ÄR EN BIJEKTION.

E8 I HILBERTS HOTELL FINNS OÄNDLIGT MÅNGA RUM, NUMRERADE 1, 2, 3, ...

a) EN MATEMATIKER FÅR PROBLEM MED SIN INKVARTERING DÅ HAN FÅR HÖRA ATT ALLA RUM ÄR UPPTAGNA. HAN FÖRESLÅR ÄGAREN ATT FLYTTA GÄSTERNA SÅ ATT ALLA, INKLUSIVE HAN SJÄLV, FÅR VARSITT RUM. HUR SKULLE DET KUNNA GÅ TILL?

b) DET KOMMER EN BUSS MED 50 NYA GÄSTER. HUR KAN DE FÅ VARSITT RUM DÅ ALLA RUM ÄR UPPTAGNA?

c) DET KOMMER OÄNDLIGT MÅNGA NYA GÄSTER (UPPRÄKNELIGT MÅNGA). HUR LÖSER MAN DERAS INKVARTERING I HILBERTS HOTELL?



E9 ENL. ÖVN. E7 ÄR $\mathbb{Z}$ UPPRÄKNELIGT. VISA ATT ÄVEN $\mathbb{Q}$ ÄR UPPRÄKNELIGT. (BÖRJA MED ATT VISA ATT MÄNGDEN AV DE POSITIVA RATIONELLA TALEN ÄR UPPRÄKNELIG.)

E10 VISA ATT $\mathbb{R}$ <u>INTE</u> ÄR UPPRÄKNELIGT. DETTA ÄR EN SATS SOM VISADES 1872 AV GEORG CANTOR, EN AV GRUNDARNA AV DEN MODERNA MÄNGDTEORIN. UPPGIFTEN ÄR SVÅR, MEN INTE OMÖJLIG, OCH ROLIG!? NEDAN GES EN LEDNING.

E11 KAN DU GE EN DEFINITION AV OÄNDLIG MÄNGD?

LEDNING TILL **E10**: ANTAG MOTSATSEN, DVS ATT $\mathbb{R}$ ÄR UPPRÄKNELIG OCH LÅT $x_1, x_2, x_3, \ldots$ VARA EN UPPRÄKNING AV DE REELLA TALEN I $]0,1[$. LÅT a_{in} VARA n:te DECIMALSIFFRAN I DECIMALUTVECKLINGEN AV x_i, DVS. $x_i = 0{,}a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots$ FÖR $i = 1, 2, 3, \ldots$ KONSTRUERA NU ETT TAL $x = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ SÅDANT ATT x INTE FINNS MED BLAND TALEN $x_1, x_2, x_3, \ldots$