ÖVNING 5

OM KOMBINATORIK

ÖVNINGENS SYFTE ÄR ATT UPPTÄCKA VISSA ALLMÄNNA PRINCIPER FÖR KOMBINATORISKA RESONEMANG OCH ATT SE HUR KOMBINATORISKA PROBLEM UPPKOMMER I OLIKA SITUATIONER, SAMT ATT KUNNA BEVISA MATEMATISKA PÅSTÅENDEN (BL.A. BINOMIALSATSEN) MED HJÄLP AV KOMBINATORIK. VIKTIGA BEGREPP:

- DIRICHLETS LÅDPRINCIP
- MULTIPLIKATIONSPRINCIPEN
- PERMUTATIONER
- KOMBINATIONER
- BINOMIALSATSEN

DIRICHLETS LÅDPRINCIP

A1 DISKUTERA – UTAN ATT TITTA I BOKEN – FÖLJANDE FRÅGOR:

- HUR MÅNGA STUDENTER MÅSTE DET MINST VARA I EN GRUPP FÖR ATT MAN SÄKERT SKALL VETA ATT MINST TVÅ AV DEM FYLLER ÅR I SAMMA MÅNAD?
- HUR MÅNGA MÅSTE DET FINNAS FÖR ATT MINST 3, 4, 5, ... n, SKALL HA FÖDELSEDAG I SAMMA MÅNAD?
- TÄNK EFTER HUR NI RESONERADE OCH FÖRSÖK FORMULERA EN ALLMÄN PRINCIP.

NI HAR FÖRMODLIGEN NU FORMULERAT DIRICHLETS LÅDPRINCIP I NÅGON VARIANT. KOLLA NU – MEN FÖRST NU – I BOKEN.

A2 BETRAKTA FÖLJANDE PÅSTÅENDE

"BLAND ER SOM LÄSER MATEMATIK 1 FINNS MINST TVÅ PERSONER SOM KÄNNER LIKA MÅNGA BLAND DE ÖVRIGA"

ÄR PÅSTÅENDET SANT? BEHÖVS NÅGON

A3 VISA ATT BLAND 101 HELTAL FINNS MINST TVÅ VARS SKILLNAD ÄR DELBAR MED 100.

MULTIPLIKATIONSPRINCIPEN

B1 ANTAG ATT DU HAR 4 OLIKA JEANS OCH 6 OLIKA T-SHIRTS.

- PÅ HUR MÅNGA OLIKA SÄTT KAN DU KLÄ DIG?
- ANTAG ATT DU AV NÅGON ANLEDNING VILL HA 2 T-SHIRTS PÅ DIG.
  PÅ HUR MÅNGA OLIKA SÄTT KAN DU DÅ KLÄ **DIG**?
  DET FINNS TVÅ SÄTT ATT TÄNKA OM DEN SISTA FRÅGAN. VILKA? HUR MÅNGA SÄTT BLIR DET I DE BÅDA FALLEN?
- TÄNK EFTER HUR NI HAR RESONERAT OCH FÖRSÖK ATT FORMULERA EN PRINCIP. JÄMFÖR DÄREFTER MED MULTIPLIKATIONS-PRINCIPEN I BOKEN.

B2 GÖR ÖVN. ~~5.4~~ OCH ~~5.6~~.

PERMUTATIONER OCH KOMBINATIONER

C1 BETRAKTA EN MÄNGD MED TRE OBJEKT (ELEMENT), SOM VI BETECKNAR a, b OCH c. OM VI SKRIVER DESSA TRE OBJEKT I EN VISS ORDNING, T.EX.

bac

SÅ KALLAR VI DETTA EN PERMUTATION AV ELEMENTEN a, b OCH c. ANDRA PERMUTATIONER ÄR

acb, abc, cab

- FINNS DET FLER? HUR MÅNGA? SKRIV UPP ALLA!
- HUR MÅNGA PERMUTATIONER FINNS DET AV EN MÄNGD MED 4 ELEMENT?
- GENERALISERA TILL ETT PÅSTÅENDE OM ANTALET PERMUTATIONER AV EN MÄNGD MED n ELEMENT.

TÄNK NU TILLBAKA PÅ UPPGIFTEN SOM HANDLADE OM ANTALET SÄTT ATT KLÄ SIG MED 2 T-SHIRTAR DÅ MAN HADE 6 ATT VÄLJA BLAND (VI BRYR OSS INTE OM JEANSEN NU). DET FINNS TVÅ SÄTT ATT TOLKA PROBLEMET:

(1) ORDNINGEN MELLAN DE TVÅ VALDA T-SHIRTARNA SPELAR ROLL (DVS. VILKEN SOM ÄR UNDERST RESP. ÖVERST.)
I DETTA FALL TALAR VI OM ATT VÄLJA EN <u>PERMUTATION</u> AV 2 ELEMENT BLAND 6 GIVNA.

(2) ORDNINGEN SPELAR INTE NÅGON ROLL. DÅ TALAR VI OM ATT VÄLJA EN <u>KOMBINATION</u> AV 2 ELEMENT UR 6 GIVNA.

C2 BETRAKTA EN GIVEN MÄNGD $\{a,b,c\}$ MED 3 ELEMENT. ALLA MÖJLIGA PERMUTATIONER AV 2 ELEMENT VALDA BLAND DESSA 3 ÄR

$$ab, ac, bc, ba, ca, cb$$

- HUR MÅNGA PERMUTATIONER AV 2 ELEMENT VALDA UR EN MÄNGD MED 4 ELEMENT, $\{a,b,c,d\}$, FINNS DET? SKRIV UPP ALLA!
- HUR MÅNGA PERMUTATIONER AV 3 ELEMENT VALDA BLAND 4 FINNS DET? SKRIV UPP ALLA!
- HUR RESONERAR NI? FINN EN PRINCIP OCH FORMULERA DEN! GENERALISERA!
- DVS, GE EN FORMEL FÖR ANTALET PERMUTATIONER AV k ELEMENT VALDA BLAND n GIVNA. DETTA ANTAL BETECKNAS I BOKEN $P(n,k)$. JÄMFÖR ERT RESULTAT MED BOKENS UTTRYCK FÖR $P(n,k)$.

C3 GÅ TILLBAKA TILL ÖVN. C2 OVAN. I DET FÖRSTA EXEMPLET SÅG VI ATT

$$ab, ac, bc, ba, ca, cb$$

VAR ALLA PERMUTATIONER AV 2 ELEMENT VALDA BLAND 3. VI SER ATT ab OCH ba INNEHÅLLER SAMMA ELEMENT; SAMMA SAK GÄLLER ac & ca RESPEKTIVE bc & cb.
ATT VÄLJA 2 ELEMENT UR 3 GIVNA DÄR MAN BORTSER FRÅN ORDNINGEN MELLAN ELEMENTEN KALLAS FÖR ATT VÄLJA EN KOMBINATION AV 2 ELEMENT UR 3 GIVNA.
DET FINNS ALLTSÅ 3 KOMBINATIONER AV 2 ELEMENT UR 3 GIVNA. DETTA TAL BRUKAR SKRIVAS $\binom{3}{2}$ "TRE ÖVER TVÅ"

VI HAR ALLTSÅ ATT $\binom{3}{2} = 3$.

- TITTA NU PÅ ERA UPPSKRIVNA PERMUTATIONER AV 2 RESP. 3 ELEMENT VALDA BLAND 4. BESTÄM GENOM EN DIREKT KONTROLL VAD

$$\binom{4}{2} \text{ OCH } \binom{4}{3}$$

BLIR!

- NI HAR I C2 BERÄKNAT $P(4,2)$ OCH $P(4,3)$ (BOKENS BETECKNINGAR). FUNDERA NU ÖVER SAMBANDET MELLAN $P(4,2)$ OCH $\binom{4}{2}$ SAMT MELLAN $P(4,3)$ OCH $\binom{4}{3}$.
FÖRSÖK FINNA OCH FORMULERA EN REGEL. GENERALISERA DENNA REGEL, DVS FINN EN FORMEL FÖR $\binom{n}{k}$. JÄMFÖR MED BOKEN.

C4

VI HAR DEFINIERAT $\binom{n}{k}$ SOM ANTALET KOMBINATIONER AV k ELEMENT VALDA UR n GIVNA. NI HAR (?) FUNNIT DET ALGEBRAISKA SAMBANDET

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

TÄNK IGENOM VAD DET BETYDER DÅ $k=0$ RESP. DÅ $k=n$. STÄMMER DET? VAD ÄR $\binom{n}{0}$ RESP. $\binom{n}{n}$?

C5

LÅT M_n VARA MÄNGDEN $\{1, 2, \ldots, n\}$, ELLER VILKEN SOM HELST MÄNGD MED n ELEMENT.

- HUR MÅNGA DELMÄNGDER HAR M_2? HUR MÅNGA AV DESSA DELMÄNGDER HAR ETT ELEMENT? HUR MÅNGA HAR TVÅ ELEMENT? NOLL ELEMENT?

- GÖR OM MOTSVARANDE FÖR $n = 3, 4, 5$. GÖR DETTA PÅ NÅGOT SYSTEMATISKT SÄTT, OCH SKRIV NED RESULTATET PÅ EN RAD FÖR VARJE n (TA MED $n=0$ OCH $n=1$).

- BETRAKTA FÖLJANDE TRIANGULÄRA SCHEMA:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \cdots & & & \end{array}$$

VAD HAR DETTA MED DELMÄNGDERNA TILL M_n, $n = 0, 1, \ldots$, ATT GÖRA?

- VISA SAMBANDET

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad 1 \le k \le n$$

MED HJÄLP AV ETT KOMBINATORISKT RESONEMANG. VISA DET ÄVEN ALGEBRAISKT

- BERÄKNA DE 6 FÖRSTA RADERNA I SCHEMAT, GENOM ATT ANVÄNDA REKURSIONSFORMELN NI JUST HAR VISAT. KÄNNER NI IGEN PASCALS TRIANGEL?
- DET FINNS EN SYMMETRI I VARJE RAD I TRIANGELN. FÖRSÖK FORMULERA ETT PÅSTÅENDE OM $\binom{n}{k}$ SOM BESKRIVER JUST SYMMETRIN. BEVISA PÅSTÅENDET MED ETT KOMBINATORISKT RESONEMANG.
- VAD ÄR SUMMAN AV EN RAD I TRIANGELN, DVS. VAD ÄR $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$?

C6 GÖR ÖVN. ~~5.7 – 5.14~~, ~~5.20~~ 5.38, ~~5.21~~ 5.39, ~~5.23~~ 5.42
5.13–5.16, 5.18, 5.20, 5.21, 5.26.
SAMT: 5.23, 5.24, 5.35, 5.41, 5.43, 5.45

C7 LÅT M OCH N VARA TVÅ ÄNDLIGA MÄNGDER MED m RESPEKTIVE n ELEMENT.
- BESTÄM HUR MÅNGA OLIKA FUNKTIONER $f: M \to N$ DET FINNS.
- ANGE ETT NÖDVÄNDIGT VILLKOR PÅ m OCH n FÖR ATT FUNKTIONEN $f: M \to N$ SKALL KUNNA VARA
  - INJEKTIV
  - SURJEKTIV
  - BIJEKTIV
- BESTÄM, UNDER LÄMPLIGA VILLKOR PÅ m OCH n, HUR MÅNGA OLIKA FUNKTIONER $f: M \to N$ DET FINNS SOM ÄR
  - INJEKTIVA
  - SURJEKTIVA
  - BIJEKTIVA

"VARNING": FALLET MED SURJEKTIVA ÄR INTE HELT LÄTT!

BINOMIALSATSEN

D1 TITTA PÅ PRODUKTEN

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

- OM MAN MULTIPLICERAR IHOP PARENTESERNA* TILL HÖGER FÅR MAN EN SUMMA AV TERMER AV FORMEN $x^{5-k}y^k$, $k=0,1,\dots,5$. ELLER HUR? HUR MÅNGA TERMER AV FORMEN x^5 FÅR MAN? HUR MÅNGA AV FORMEN x^4y? OSV. FÖR $k=2,3,4,5$?
FÖRSÖK HITTA ETT ALLMÄNT UTTRYCK FÖR ANTALET TERMER AV FORMEN $x^{5-k}y^k$ OCH SKRIV PRODUKTEN M.HJ.A. SUMMASYMBOLEN
- GENERALISERA RESULTATET OCH JÄMFÖR MED BINOMIALSATSEN I BOKEN.

D2 GÖR ÖVN. ~~5.24 – 5.29~~
5.46, 5.47

* GÖR DET INTE

EXTRA ÖVNINGAR

E1 GÖR ÖVN. ~~5.46~~ 5.57, ~~5.48~~ 5.59, ~~5.49~~ 5.60, ~~5.51~~ 5.62, ~~5.64~~ 5.75, ~~5.66~~ 5.77, ~~5.67~~ 5.78.

E2 PÅ HUR MÅNGA SÄTT KAN MAN PLACERA UT 12 OLIKA KRUKVÄXTER PÅ 3 FÖNSTERBÄNKAR?

E3 EN TÄVLING I (AMERIKANSK) TV GÅR TILL PÅ FÖLJANDE VIS: PÅ SCENEN FINNS TRE DÖRRAR. DEN TÄVLANDE VET ATT DET BAKOM PRECIS EN AV DESSA STÅR EN CADILLAC, OCH ATT DET BAKOM VAR OCH EN AV DE ÖVRIGA TVÅ STÅR EN GET. DEN TÄVLANDE STÄLLER SIG FÖRST VID EN VALFRI DÖRR. TÄVLINGSLEDAREN (SOM VET VAR BILEN STÅR) ÖPPNAR NU EN AV DE TVÅ ANDRA DÖRRARNA SÅ ATT EN GET DYKER UPP. DEN TÄVLANDE FÅR NU VÄLJA ATT ANTINGEN ÖPPNA DEN DÖRR HON/HAN REDAN STÅR VID ELLER DEN ANDRA OÖPPNADE DÖRREN OCH VINNER SEDAN DET SOM FINNS BAKOM.

BÖR MAN STÅ KVAR ELLER BYTA DÖRR OM MAN HELLRE VILL VINNA BILEN ÄN GETEN?