MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2011-10-21.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Martin Berglund, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. (a) Definiera begreppen *reflexiv*, *symmetrisk* och *transitiv* relation.
   (b) Ge exempel på en relation på $\mathbb{Z}$ som är symmetrisk, men varken reflexiv eller transitiv. (3p)

2. (a) Låt $P(m, n)$ vara antalet permutationer av n element bland m. Ge ett argument för formeln

$$P(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

   (b) Låt $\binom{m}{n}$ vara antalet kombinationer av n element bland m. Ge ett argument för formeln

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

(3p)

3. (a) Antag att $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Visa att om $a \mid b$ och $a \mid c$ så gäller att $a \mid xb + yc$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$.
   (b) Visa omvändningen, d v s att om $a \mid xb + yc$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$ så gäller att $a \mid b$ och $a \mid c$. (3p)

4. (a) Beräkna SGD$(3042, 4485)$ med Euklides algoritm.
   (b) Bestäm heltal x och y sådana att $3042x + 4485y = SGD(3042, 4485)$. (3p)

5. Klass 9A ska välja ett luciatåg som ska bestå av 1 lucia, 4 tärnor och 2 stjärngossar. I klassen går det 10 flickor och 13 pojkar. På hur många olika sätt går det att välja luciatåget. (Vi antar att man är såpass konservativ att lucia och tärnor väljs bland flickorna och stjärngossarna bland pojkarna.) Svaret ska vara ett explicit heltal för full poäng. (3p)

Var god vänd!

6. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$
för alla heltal $n > 1$. (3p)

7. (a) Beräkna resten vid division med 11 för 1718^{1632}.
   (b) Bestäm alla positiva heltalslösningar x till ekvationen
$$1718^x \equiv 5 \pmod{11}.$$
(4p)

8. Låt $\langle G, \star \rangle$ och $\langle H, * \rangle$ vara två abelska grupper. Vi definierar en operator $\oslash$ på kartesiska produkten $G \times H$ genom
$$(g_1, h_1) \oslash (g_2, h_2) = (g_1 \star g_2, h_1 * h_2).$$
Visa att $\langle G \times H, \oslash \rangle$ är en abelsk grupp. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 3 november. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 9.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.