Matematik
HC

Hjälpmedel: Inga, inte ens typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Oscar Marmon
076-272 18 61

MMG200, Linjär algebra

Tentamen den 26 mars 2008, 8.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Ge inga motiveringar utan svara endast sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så är $2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ också en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (b) Vektorn $(2, 4, -2)$ är vinkelrät mot planet $z = x + 2y + 3$.

   (c) Det finns en matris A sådan att kolonnvektorerna i A är linjärt beroende och ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en entydig lösning.

   (d) Vektorn $(1, 3)$ är en egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (e) Om A, B och C är kvadratiska matriser med $C \neq 0$ och $AC = BC$ så måste $A = B$.

   (f) Om A, B och C är kvadratiska matriser med $\det(C) \neq 0$ och $CA = CB$ så måste $A = B$.

   (g) Det finns en matris med fyra rader och fem kolonner så nollrummet och kolonnrummet till A har samma dimension.

   (h) Antag att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ och att A är en inverterbar matris. Då är $A\mathbf{e}_1$, $A\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $A\mathbf{e}_n$ också en bas för $\mathbb{R}^n$.

Vänd!

2. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0,1,2)$, $(1,2,3)$ och $(1,1,3)$.

3. Bestäm för alla värden på a antalet lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & (2a+3)z & = & 3 \\ x & + & (a+1)y & + & (2a+3)z & = & 3 \end{cases}.$$

4. Den linjära avbildningen A uppfyller att

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \text{ och } A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Bestäm matrisen för A i standardbasen.

5. (a) Låt

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Vilken punkt i kolonnrummet till A ligger närmast $\mathbf{b}$?

6. Bestäm en kvadratrot till matrisen $A = \begin{bmatrix}7 & 3\\-6 & -2\end{bmatrix}$, dvs. en matris B sådan att $B^2 = A$.

7. Låt V vara ett delrum till $\mathbb{R}^5$ som har en bas som består av två vektorer. Visa att om $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är tre vektorer i V så är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ linjärt beroende.

8. Låt A vara en matris med fler kolonner än rader. Bevisa att $\det(A^TA) = 0$.