Matematik
HC

Hjälpmedel: Inga, inte ens typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Ragnar Freij
076-272 18 61

MMG200, Linjär algebra

Tentamen den 25 augusti 2008, 8.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Ge inga motiveringar utan svara endast sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Antag att $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ är linjärt beroende. Då är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ också linjärt beroende.

   (b) Tre vektorer i $\mathbb{R}^4$ är alltid linjärt oberoende.

   (c) Antag att A och B är 3×3-matriser. Om A och B är inverterbara så är AB också inverterbar.

   (d) Antag att A och B är 3×3-matriser. Om AB är inverterbar så är A och B också inverterbara.

   (e) Om Q är en ortogonalmatris så har ekvationen $Q\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (f) Om A, B och C är kvadratiska matriser med $C \neq \mathbf{0}$ och $CA = CB$ så måste $A = B$.

   (g) Om A är en kvadratisk matris vars sista kolonn bara består av nollor så är 0 ett egenvärde till A.

   (h) Det finns en symmetrisk matris A, $A \neq \mathbf{0}$, sådan att $A^5 = \mathbf{0}$.

Vänd!

2. Skriv om möjligt vektorn $(1,3,2,-4)$ som en linjärkombination av vektorerna $(2,0,-1,3)$, $(3,1,0,-2)$ och $(1,0,0,-2)$.

3. Låt $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonalprojektion på linjen $y = -2x$. Bestäm matrisen för A i standardbasen.

4. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} .$$
Vilken punkt i lösningsmängden till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ligger närmast origo?

5. Bestäm ekvationen för den linje *genom origo* som bäst ansluter till till punkterna $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,4)$ och $(4,4)$.

6. I en viss skog finns uggglor och möss. Om u_n är antalet ugglor i hundratal och m_n är antalet möss i tiotusental efter n år så gäller
$$\begin{cases} u_{n+1} &= 0,4u_n + 0,6m_n \\ m_{n+1} &= -0,3u_n + 1,3m_n \end{cases} .$$
Hur många ugglor och möss finns det efter n år om det från början fanns 200 ugglor och 30 000 möss (dvs. $u_0 = 2$ och $m_0 = 3$)?

7. Låt H, $H \neq \{\mathbf{0}\}$, vara ett delrum till $\mathbb{R}^3$. Visa att H har en bas och att antalet vektorer i en bas är högst 3.
(Du får använda att fyra eller fler vektorer i $\mathbb{R}^3$ alltid är linjärt beroende.)

8. Låt A vara en matris med egenvärdet λ. Visa att om P är en inverterbar matris så har matrisen $B = PAP^{-1}$ också egenvärdet λ.