

MATEMATIK

Göteborgs universitet

Tentamen i Linjär algebra, MMG200, 2009-04-18, kl. 8.30-13.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0762-721861.

3

OBS: Ange din personliga kod på omslaget.
Ange din personliga kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng.
För betyget 3 krävs minst 12 poäng sammanlagt, för VG krävs 18 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x & + z - u = 2 \\ & -y + 2z - u = 5 \\ x & + z + 2u = 3 \\ -2x - y + z & = 6 \end{cases} \quad (3p)$$

2. Låt A vara koefficientmatrisen till ekvationssystemet i Uppgift 1.

- (a) Är $\det(A) = 0$?
- (b) Har A något egenvärde som är noll?
- (c) Är vektorerna $(-1, 0, 1, -2)$, $(0, -1, 0, -1)$, $(1, 2, 1, 1)$ och $(-1, -1, 2, 0)$ linjärt beroende? (3p)

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Beräkna A 's egenvärden och egenvektorer.
- (b) Vad är A^3 ?
- (c) Beräkna A^{-1} . (4p)

4. Låt π_1 och π_2 vara två plan i \mathbb{R}^3 givna av ekvationerna

$$\pi_1 : x + y + z = 0 \text{ och } \pi_2 : x + 2y + 3z = 2.$$

Ge exempel på ett plan π_3 så att alla tre planen skär varandra i exakt en linje.

(3p)

vänd...

5. Låt

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- (a) Förklara vad på vilket sätt denna matris flyttar punkter i planet, d v s hur punkten $\mathbf{y} = R_\alpha \mathbf{x}$ förhåller sej till \mathbf{x} .
- (b) Kan R_α ha några reella egenvärden och vad är i så fall dessa?
- (c) Försök att härleda, och därmed bevisa, additionsformeln för cosinus, d v s den formel som uttrycker $\cos(\alpha + \beta)$ i $\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha$ och $\cos \beta$.

(5p)

6. En familj bor i ett tvåvåningshus. När de går mellan våningarna tar de ibland med saker som sedan lämnas på på nya platser. Mamman i familjen är matematikintresserad och har märkt att i de genomsnitt varje dag bär upp hälften av de saker som finns på nedervåningen upp till övervåningen, samtidigt som man bär ner två tredjedelar av det som finns på övervåningen till nedervåningen. Beskriv detta dynamiska system mha matriser och beräkna hur fördelningen av saker blir mellan våningarna på lång sikt.

(3p)

7. Antag att M är en matris sådan att $M^n = E$ för något naturligt tal n . Visa att om λ är ett egenvärde till M så är $|\lambda| = 1$.

(4p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 10 maj. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL!

Samuel.