MATEMATIK
Göteborgs universitet
Lösningar till tentamen i Linjär algebra, MMG200, 20090414

---

1. Vi Gauss-eliminerar totalmatrisen.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$
Bakåtsubstitution ger till sist att $(x, y, z, w) = (-1, -2, 2, 1)$.

2. Dessa uppgifter kan man svara på utan att räkna om man vill, om man använder resultatet i Uppgift 1.

   (a) Svar: Nej. Eftersom vi hade entydig lösning är determinanten för koefficient matrisen determinant skild ifrån 0.

   (b) Svar: Nej. Då determinanten är produkten av egenvärdena och determinanten av A är skild ifrån noll kan ingen av egenvärdena vara noll.

   (c) Svar: Nej de är linjärt oberoende. Vektorerna $(-1, 0, 1, -2), (0, -1, 0, -1), (1, 2, 1, 1)$ och $(-1, -1, 2, 0)$ är kolonnerna i koefficient matrisen A. Då denna hade determinant skild ifrån noll är kolonnerna (och även raderna) linjärt oberoende.

3. (a) För att beräkna egenvärden betraktar vi
$$0 = det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1.$$
Vi får den binomiska ekvationen $\lambda^3 = 1$, som vi löser genom att sätta $\lambda = re^{i\theta}$. Får $r^3 e^{i3\theta} = \lambda^3 = 1 = 1e^{i0}$ vilket betyder $r^3 = 1$, d v s$r = 1$, och $3\theta = 0 + 2n\pi$, d v s$\theta = \frac{2n\pi}{3}$. Vi har funnit tre egenvärden motsvarande de tre enhetsrötterna svarande mot $n = 0, 1, 2$.
$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \omega \qquad \lambda_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \omega^2.$$
För att finna egenvektorer till egenvärdet λ_1 betraktar vi totalmatrisen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Vi finner att $(1, 1, 1)$ är en egenvektor. För λ_2 betraktar vi
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\omega & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
d v s$(1, \omega, \omega^2)$ är en egenvektor. Slutligen finner man på samma sätt att $1, \omega^2, \omega$ är en egenvektor för egenvektorn λ_3. I denna uppgift nöjer jag mig med att man räknar ut det reella egenvärdet och motsvarande egenvektor.

(b) Direkt räkning ger att om vi multiplicera ihop tre A matriser får vi den treradiga identitetsmatrisen E.

Alternativt följer detta från att $A^3 = V\Lambda^3 V^{-1}$. Då diagonal elementen i Λ är egenvärdena och dessa uppfyller ekvationen $\lambda^3 = 1$ finner vi att $\Lambda^3 = E$ och därmed är $A^3 = VEV^{-1} = VV^{-1} = E$. Man bör då också klarlägga att kolonnerna i V är egenvektorerna och dessa är linjärt oberoende alltså finns V^{-1}.

(c) Som vi fann i uppgift 3b så är $E = A^3 = A^2 A$. Detta betyder definitionsmässigt att $A^2 = A^{-1}$, dvs

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. De två planen

$$\pi_1 : x + y + z = 0 \text{ och } \pi_2 : x + 2y + 3z = 2.$$

skär varandra i en linje L då de har linjärt oberoende normaler. Vi vill alltså hitta ett tredje plan som innehåller denna linje L. De plan som innehåller denna linje har alla normal vektor som är en linjärkombination av normal vektorerna till planen π_1 och π_2, d v s är på formen

$$\mathbf{n} = a(1,1,1) + b(1,2,3).$$

Om planet har sådan normalvektor och den innehåller någon punkt på L så innehåller den hela linjen L. Ser att t ex ligger punkten $(-1,0,1)$ på L och därmed är varje plan som innehåller L av typen

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{n} \cdot ((x,y,z) - (-1,0,1)) = (a(1,1,1) + b(1,2,3)) \cdot ((x,y,z) - (-1,0,1)) \\ &= a(1,1,1) \cdot (x,y,z) - a\,0 + b(1,2,3) \cdot (x,y,z) - b\,2 \\ &= a(x + y + z - 0) + b(x + 2y + 3z - 2). \end{aligned}$$

Dvs varje linjär kombination av planen fungerar, speciell duger det att låta π_3 vara lika med π_1 eller π_2.

5. (a) Matrisen

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

vrider planet α vinkeln α moturs. Det kan ses genom att se vad den gör med de två linjärt oberoende vektorerna $(1,0)$ och $(0,1)$.

(b) En egenvektor, svarande mot ett reellt egenvärde, ligger på en linje i R^2 som avbildas på sej själv av matrisen. Då inser vi att vi endast kan ha reella egenvärden då $\alpha = n\pi$ för något $n \in \mathbb{Z}$. Om n jämnt är $R_\alpha = E$, den tvåradiga identitets matrisen, och därmed är alla linjer egenvektorer med egenvärde 1. Om n udda är $R_\alpha = -E$ och alla vektorer är egenvektorer men nu med egenvärde -1.

(c) Finner att om vi applicerar matrisen R_α och sedan R_β så vrider vi planet vinkeln $\alpha + \beta$. Det får vi också om vi applicerar matrisen $R_{\alpha+\beta}$, d v svi har att

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

Elementet i första rad och kolonn ger att $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

6. (a) Matrisen M ges av $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   (b) M´s egenvärden är nollställen till $0 = (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{2}{3} - \lambda) - \frac{1}{6}$. Nollställena är $\frac{1}{6}$ och 1. Motsvarande egenvärden är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Fördelningen stabiliseras mot egenvektorn som motsvarar egenvärde 1 d v s på övervåningen samlas $\frac{2}{5}$ och på nedervånginen $\frac{3}{5}$ av familjens saker.

7. Antag att λ är ett egenvärde till M och att $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Då gäller att $M^n\mathbf{v} = E\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Å andra sidan är $M^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$. Vi finner att $\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$, d v s$\lambda^n = 1$. Detta innebär att λ är en enhetsrot och ligger på enhetscirkeln , ty om vi tar belopp av bägge leden finner vi att

$$1 = |\lambda^n| = |\lambda|^n.$$

Då $|\lambda|$ är reellt och positivt måste $|\lambda| = 1$.