

Lösningar till Linjär algebra,  
MMG 200:2 2011-04-26

- ① b, e, f, h sant. Övriga falskt.  
 ② a) Sats 2.5, b) Sats 2.6, c) Sats 2.12  
 ③ Sats 7.1

④ a) Triangeln spänns upp av vektorerna

$$v_1 = (2, 2, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1) \text{ och}$$

$$v_2 = (-1, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-2, 1, 0).$$

$$v_1 \times v_2 = (1, 2, 5). \text{ Arean} = \frac{1}{2} |v_1 \times v_2| = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

b)  $T = \frac{1}{3} [(-1, 1, 1) + (2, 2, 0) + (1, 0, 1)] = (\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3})$

⑤ 
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ -2 & 2 & a & a \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & a \end{array} \right]$$

Entydig lösning om  $a \neq 1$  och  $-2$ .

$a=1$  
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

En fri variabel: Många lösningar

$a=-2$  
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \text{ Ingen lösning}$$

⑥ Vi söker minsta-kvadrat-lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ dvs vi skall lösa systemet}$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 & 7 \\ 10 & 5 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 10 & 0 & -17 \\ 0 & 5 & 29 \end{bmatrix}, \text{ dvs } a = -\frac{17}{10}, b = \frac{29}{5}$$

Linjen är  $y = -\frac{17}{10}x + \frac{29}{5}$

⑦ Om  $A$  är avbildningsmatrisen så gäller

$$A \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \text{ dvs } A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Invertera  $\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \end{array} \right]$

Och  $A = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Så  $Ax=0$  har lösning  $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  som alltså är Nollrummet.

⑧  $A^3 = A \Leftrightarrow A^3 - A = 0 \Leftrightarrow A(A+I)(A-I) = 0$

Nu är  $\det A \neq 0$  annars vore  $\lambda=0$  ett eget värde.

Men också  $\det(A+I) \neq 0$  - " -  $\lambda = -1$  - "

Multiplitera med  $(A+I)^{-1}A^{-1}$  från vänster i \*) så får vi  $A-I=0$ , dvs  $A=I$ .