Lösningar till MMG 200:2 Linjär algebra 2011-12-16

①

a	b	c	d	e	f	g	h
s	f	f	s	f	s	f	s

② a) Sats 1.11

b) Sats 2.12

③ Sats 2.2 a

④
$$\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&3&3\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}x=-1+t\\ y=3-3t\\ z=t\end{matrix}$$

b) skärningslinjen: $\underline{(x,y,z)=(-1,3,0)+t(1,-3,1)}$

a) normalvektor till sökta planet = riktningsvektor till linjen: $n=(1,-3,1)$

Planet: $1\cdot(x-1)-3(y+1)+1(z+1)=0$, dvs

$$\underline{x-3y+z=3}$$

⑤
$$\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&a+1&1&1\\1&1&a+1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=a^2(a-1)$$

$\underline{a\neq 1,0}\Rightarrow \det A\neq 0\Rightarrow$ $\underline{\text{rangen}=4}$

$\underline{a=1}\Rightarrow A\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$ $\underline{\text{rangen}=3}$

$\underline{a=0}\Rightarrow A\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$ $\underline{\text{rangen}=2}$

⑥ Vi löser $A^TA=A^Tb$:

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix},\quad A^Tb=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&1&4\\1&3&4\end{bmatrix}\sim\cdots\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\qquad \underline{\begin{matrix}x=1\\y=1\end{matrix}}$$

Felvektorn: $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}}$

⑦ $x_{n+1}=Ax_n$, $A=\begin{bmatrix}5&3\\3&5\end{bmatrix}$, $x_0=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$

Egenvärden: $0=\det\begin{vmatrix}5-\lambda&3\\3&5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+16=(\lambda-2)(\lambda-8)$

$\lambda_1=2$: $\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ egenvektor: $v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=8$: $\begin{bmatrix}-3&3\\3&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ egenvektor $v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$x_{n+1}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&8\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}x_0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&0\\0&8^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&-2^n\\8^n&8^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 2^n-8^n\\-2\cdot 2^n-8^n\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}x_n=2\cdot 2^n-8^n\\ y_n=-2\cdot 2^n-8^n\end{cases}$$

⑧ Vi bestämmer en ortogonalbas m.h.a. Gram-Schmidt:

$$v_1=(1,2,1,0)^T,\quad v_2=(2,1,2,1)^T-\frac{(1,2,1,0)^T\cdot(2,1,2,1)^T}{(1,2,1,0)^T\cdot(1,2,1,0)^T}(1,2,1,0)^T=$$

$$=(2,1,2,1)^T-\frac{6}{6}(1,2,1,0)^T=(1,-1,1,1)^T=v_2$$

Vad avbildas standardbasvektorerna på?

$$F(1,0,0,0)^T=\frac{(1,0,0,0)^T\cdot(1,2,1,0)^T}{|(1,2,1,0)^T|^2}(1,2,1,0)+\frac{(1,0,0,0)^T\cdot(1,-1,1,1)^T}{|(1,-1,1,1)^T|^2}(1,-1,1,1)$$

$$=\frac{1}{6}(1,2,1,0)^T+\frac{1}{4}(1,-1,1,1)^T=\frac{1}{12}(5,1,5,3)^T$$

$$F(0,1,0,0)^T=\frac{1}{3}(1,2,1,0)^T-\frac{1}{4}(1,-1,1,1)^T=\frac{1}{12}(7,5,7,3)^T$$

$$F(0,0,1,0)^T=\frac{1}{6}(1,2,1,0)^T+\frac{1}{4}(1,-1,1,1)=\frac{1}{12}(5,1,5,3)^T$$

$$F(0,0,0,1)^T=0+\frac{1}{4}(1,-1,1,1)=\frac{1}{12}(3,-3,3,3)$$

Avbildingsmatris
$$A=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}5&1&5&3\\1&11&1&-3\\5&1&5&3\\3&-3&3&3\end{bmatrix}$$