Lösningar
MMG 200-2
12 04 10

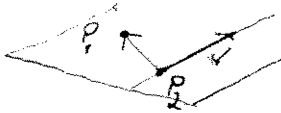
(1) a) f b) s c) s d) f e) f f) s g) s h) s

(2) Sats 6.2

(3) Sats 7.1

---

(4) $\mathbf{v} = (1,1,-1)$, $P_1 = (0,-1,1)$, $P_2 = (1,-1,2)$



$\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ och $\mathbf{n} \perp \overline{P_2P_1}$ ger

$\mathbf{n} = s\,\mathbf{v} \times \overline{P_2P_1} = s(1,1,-1) \times (-1,0,-1) = s(-1,2,1)$

Vi väljer $s=1$. Planets ekvation:

$-x+2y+z=d$. Insättning av t.ex. P_1 ger $d=-1$

Svar $\underline{x-2y-z=1}$

---

(5)
$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & -a & 2 & 1 \\ a & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-a & 2-a & 0 \\ 0 & 2a-4 & 4-a^2 & 2-a \end{bmatrix}$$

$a=2$ ger
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
vilket ger 2-parametrig lösning

$a \neq 2$ ger
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & a+2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+4 & 1 \end{bmatrix}$$

Vilket ger <u>entydig lösning om $a \neq -4$, $a \neq -2$</u>

<u>Ingen lösning om $a=-4$</u>

<u>Många lösningar om $a=2$</u>

---

(6) Sök egenvärden: $0 = \det(A - \lambda I) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 5-\lambda \\ -4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = -(\lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81) =$$

$$= -(\lambda^2(\lambda-9) - 9(\lambda-9)) = (\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-9)$$

<u>Egenvektorer</u>

$\underline{\lambda_1 = -3}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_1 = r\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = s\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_3 = 9}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_3 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

normering ger $r=s=t=\frac{1}{3}$ $\quad \underline{D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}$, $\quad \underline{P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}}$

---

(7) $A \sim \dots \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$ är bas för kolonnrummet

Nollrummet: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $\quad x_2$ fri $\quad \mathbf{x} = t\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$ bas för nollrummet

---

(8) Låt $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ vara kolonnerna i A

Villkoret innebär att $\mathbf{k}_n = -(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_{n-1})$ och

$\det A = \left| \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_{n-1}\ \ -(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_{n-1}) \right| = \left(\text{Räkneregler för determinanter} \right) =$

$\sum_{j=1}^{n-1} \left| \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_{n-1}\ \ -\mathbf{k}_j \right| = \left[\text{Addera kolonn } j \text{ till sista kolonnen} \right] =$

$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_{n-1}\ \ \mathbf{0} \right| = 0 + \dots + 0.$