Lösningar till
MMG 200 - 2
Linjär algebra
2012-08-22

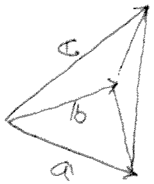
① a) till d) sant e) - h) falskt

② Sats 5 kap. 6.

③ Sats 10 kap 1.

---

④ Kantvektorer:



$$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2,0,-1) - (1,-1,1) = (1, 1, -2)$$
$$\mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = (3,-2,3) - (1,-1,1) = (2,-1,2)$$
$$\mathbf{c} = \overrightarrow{P_1P_4} = (2,-1,0) - (1,-1,1) = (1,0,-1)$$

a) Volymen $= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}(1\cdot 1 - 1\cdot(-2-2) - 2(0+1)) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

b) Mittpunkten: $P_5 = \frac{1}{2}[(2,0,1)+(3,-2,3)] = \frac{1}{2}(5,-2,2)$

Riktingsvektor: $(\frac{5}{2}, -1, 1) - (1,-1,1) = \frac{3}{2}(1,0,0)$

Linjen: $\underline{\underline{(x,y,z) = (1,-1,1) + t(1,0,0)}}$

---

⑤ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) & (3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) & (2) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bas för Col A utgörs av pivotkolonnerna: $\underline{\underline{\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}}}$.

Bas för Nul A utgörs av lösningmängden till $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ Fria variabler: $x_2 = s$, $x_4 = t$

Då är $x_3 = 2t$ och $x_1 = -2s - t$ och alltså

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s-t \\ s \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bas för Nul A: $\underline{\underline{\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$

---

⑥ Vi får systemet

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}, \quad \text{Totalmatris: } (A \mid \mathbf{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Felutjämnande system $[A^TA \mid A^T\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \cdots\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{array}\right], \text{ dvs } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/10 \\ 3/10 \end{bmatrix}$$

Svar: $\underline{\underline{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{10} + \frac{3}{10}}}$

---

⑦ Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 & 9 \\ -5 & 4-\lambda & 9 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 & 9 \\ -5 & 4-\lambda & 9 \\ \lambda & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$

$$= \lambda\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1-\lambda & 5-\lambda \\ -5 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 9) = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3).$$

$\lambda = 0$: $A - 0I \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad g_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 9 \\ -5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 12 & -12 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad g_2 = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = -3$: $A + 3I = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 \\ -4 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad g_3 = r\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}}$

---

⑧ Konstruera en ortogonalbas för underrummet:

$\mathbf{u}_1 = (0,1,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0,1)^T$. Gramm-Schmidt:

$$\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}_2}{|\mathbf{u}_1|^2}\mathbf{u}_1 = (1,1,0,1)^T - \frac{1}{2}(0,1,1,0)^T = \frac{1}{2}(2,1,-1,2)^T$$

Sätt $\mathbf{u}_2 = (2,1,-1,2)^T$. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ är en ortogonalbas.

Projektionen av $\mathbf{y}$ är då $\mathbf{z} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$ där

$$c_1 = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad c_2 = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|^2} = \frac{1}{10} \quad \text{och}$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}(0,1,1,0)^T + \frac{1}{10}(2,1,-1,2)^T = \underline{\underline{\frac{1}{5}(1,3,2,1)}}.$$