Extra övningar på gränsvärden och derivator

1 (i) Visa att

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e(x)$$

existerar för alla reella x och att

$$e(0) = 1, \quad e(x+y) = e(x)\cdot e(y).$$

Utnyttja iden i beviset av sats 6 (avsnitt 2.3).
(ii) Visa även att $e(x)$ är kontinuerlig.
(iii) Visa att $e(x)$ är deriverbar. (Börja i origo!).

2 Låt

$$f(x) = x^4(2+\sin(1/x))$$

för $x \neq 0$ och visa att att f kan utvidgas till en kontinuerlig funktion $F(x)$ på hela $\mathbb{R}$.
Visa att F är deriverbar i varje punkt och att derivatan är kontinuerlig.
Visa att 0 är en minimipunkt. Visa att F' antar både positiva och negative värden i varje omgivning till 0.

3 För vilka $\alpha > 0$ har

$$(x^4 + x^\alpha)^{1/4} - x$$

ett gränsvärde då $x \to \infty$.

4 Låt

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

för $x \neq 0$ och 1 för $x = 0$. Visa att f är deriverbar.

5 Definiera $f(x)$ som $e^{-\frac{1}{x}}$ fr $x > 0$ och 0 för $x \leq 0$. Visa att f har oändligt många derivator, dvs att f, f', f'' etc alla är deriverbara.

6 Antag att f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$ och deriverbar för $x \neq 0$ samt att $f'(x) \to 0$ då $x \to 0$. Visa att f är deriverbar i origo.

7 Antag att f är deriverbar på $]0,\infty[$ och att $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Antag vidare att f och f' är växande. Visa att $\phi(x) = f(x)/x$ är växande.

8 Antag att $f\colon]0,\infty[\to\mathbb{R}$ är deriverbar och antag att $f'(x)\to L$ då $x\to\infty$. Visa att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=L.$$

för varje fixt h.

Visa att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=L.$$

9 Antag att $f^{(n)}$ existerar på intervallet $]a,b[$ och att $f^{(n)}(x)>0$ för alla x. Visa att f har högst n nollstllen.

10 Låt

$$f(x)=x^2\sin(1/x)$$

för $x\neq 0$ och 0 då $x=0$. Visa att f är deriverbar i varje punkt. Är derivatan kontinuerlig?