

Extra övningar på integraler och differentialekvationer

1. Visa att en funktion som är kontinuerlig utom i ett ändligt antal punkter är integrerbar. (Som vanligt förutsätts funktionen vara begränsad på ett begränsat intervall.)
2. Låt f vara den funktion som definieras på $[0, 1]$ genom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{om } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ där } p, q \in \mathbb{N} \text{ och } \text{SGD}(p, q) = 1. \end{cases}$$

- (a) Visa att f är kontinuerlig i a om och endast om a är irrationellt.
 - (b) Visa att f är integrerbar.
 - (c) Vad är $\int_0^1 f(x)dx$?
3. Låt f vara en begränsad funktion på det slutna och begränsade intervallet $[a, b]$. Antag att f är integrerbar, $V_f \subseteq [m, M]$ och att ϕ är en kontinuerlig funktion på $[m, M]$.
 - (a) Visa att $\phi \circ f$ är integrerbar.
 - (b) Visa att f^2 är integrerbar.
 - (c) Visa att $|f|$ är integrerbar.
 - (d) Visa att om g också är integrerbar på $[a, b]$ så är fg integrerbar.

Ledning för (a). Låt $\epsilon > 0$. Eftersom f är likformigt kontinuerlig (Varför då?) så finns $0 < \delta < \epsilon$ så att $|\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$ då $|s - t| < \delta$. Låt P vara en partition av $[a, b]$ i intervall I_i och sätt $M_i = \sup\{|f(x)|; x \in I_i\}$ och $m_i = \inf\{|f(x)|; x \in I_i\}$. Man kan välja P (Varför då?) så att $S_P - s_P < \delta^2$ där $S_P = \sum_i M_i |I_i|$ och $s_P = \sum_i m_i |I_i|$. Dela in indexen i två mängder.

I. $i \in A$ om $M_i - m_i \leq \delta$, II. $i \in B$ om $\delta < M_i - m_i$.

Definiera nu M_i^*, m_i^*, S_p^* och s_p^* för funktionen $\phi \circ f$ i analogi med motsvarande definition för f . Då gäller (Varför då?)

$$\sum_{i \in B} |I_i| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i \in B} (M_i - m_i) |I_i| = \frac{1}{\delta} (S_p - s_p) \leq \delta$$

och

$$S_p^* - s_p^* \leq \sum_{i \in A} + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) |I_i| \leq \epsilon \sum_{i \in A} |I_i| + 2C \sum_{i \in B} |I_i| \leq \epsilon(b-a) + 2C\delta \leq K\epsilon.$$

Klart?!?