

# Extra övningar på gränsvärden och derivator

**1**

**2** Låt

$$f(x) = x^4(2 + \sin(1/x))$$

för  $x \neq 0$  och visa att  $f$  kan utvidgas till en kontinuerlig funktion  $F(x)$  på hela  $\mathbb{R}$ .

Visa att  $F$  är deriverbar i varje punkt och att derivatan är kontinuerlig.

Visa att 0 är en minimipunkt. Visa att  $F'$  antar både positiva och negativa värden i varje omgivning till 0.

**3** För vilka  $\alpha > 0$  har

$$(x^4 + x^\alpha)^{1/4} - x$$

ett gränsvärde då  $x \rightarrow \infty$ .

**4** Låt

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

för  $x \neq 0$  och 1 för  $x = 0$ . Visa att  $f$  är deriverbar.

**5** Definiera  $f(x)$  som  $e^{-\frac{1}{x}}$  fr  $x > 0$  och 0 för  $x \leq 0$ . Visa att  $f'$  och  $f''$  existerar och är kontinuerliga.

**6** Antag att  $f$  är kontinuerlig på  $\mathbb{R}$  och deriverbar för  $x \neq 0$  samt att  $f'(x) \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow 0$ . Visa att  $f$  är deriverbar i origo.

**7** Antag att  $f$  är deriverbar på  $]0, \infty[$  och att  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ . Antag vidare att  $f$  och  $f'$  är växande. Visa att  $\phi(x) = f(x)/x$  är växande.

**8** Antag att  $f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  är deriverbar och antag att  $f'(x) \rightarrow L$  då  $x \rightarrow \infty$ . Visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L.$$

för varje fixt  $h$ .

Visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = L.$$

**9** Antag att  $f^{(n)}$  existerar på intervallet  $]a, b[$  och att  $f^{(n)}(x) > 0$  för alla  $x$ . Visa att  $f$  har högst  $n$  nollställen.

**10** Låt

$$f(x) = x^2 \sin(1/x)$$

för  $x \neq 0$  och  $0$  då  $x = 0$ . Visa att  $f$  är deriverbar i varje punkt. Är derivatan kontinuerlig?