Riemannintegralen, definition och några resultat

Med hjälp av supremumbegreppet kan vi göra en mer naturlig definition av integrerbarhet och integralen av en integrerbar funktion.

Med beteckningarna i Persson-Böiers, sid. 286ff. sätter vi

$$\overline{I}(f) = \inf\{I(\Psi); \Psi \text{ en trappfunktion med } \Psi \geq f\}$$

och

$$\underline{I}(f) = \sup\{I(\Phi); \Phi \text{ en trappfunktion med } \Phi \leq f\} \; .$$

$\overline{I}(f)$ och $\underline{I}(f)$ kallas för över- respektive underintegralen till f och vi gör följande definition.

Definition 1. *En begränsad funktion på ett begränsat intervall $[a, b]$ är **(Riemann)integrerbar** om $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Om f är integrerbar betecknas **integralen** av f över $[a, b]$*

$$\int_a^b f(x)dx$$

och är lika med detta gemensamma värde,

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f) \; .$$

Sats 2. *Funktionen f är integrerbar om och endast om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ med*

$$\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \text{ och } I(\Psi) - I(\Phi) < \epsilon \; .$$

Bevis. Om f inte är integrerbar så är $\epsilon = \overline{I}(f) - \underline{I}(f) > 0$. Så om Φ och Ψ är trappfunktioner med $\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ gäller $I(\Psi) \geq \overline{I}(f)$ och $I(\Phi) \leq \underline{I}(f)$. Detta ger

$$I(\Psi) - I(\Phi) \geq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) = \epsilon \; .$$

Omvänt antar vi att f är integrerbar och att $\epsilon > 0$. Eftersom $\overline{I}(f) = \inf\{I(\Psi); \Psi \text{ en trappfunktion med } \Psi \geq f\}$ finns en trappfunktion $\Psi \geq f$ med $I(\Psi) < \overline{I}(f) + \frac{\epsilon}{2}$. På liknande sätt finns en trappfunktion $\Phi(x) \leq f$ med $I(\Phi) > \underline{I}(f) - \frac{\epsilon}{2}$. Så

$$I(\Psi) - I(\Phi) < \overline{I}(f) + \frac{\epsilon}{2} - \left(\underline{I}(f) - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon\ .$$

□

Sats 3. *Om f är monoton och begränsad på $[a, b]$ så är f integrerbar.*

Bevis. Vi bevisar satsen då f är växande. Beviset då f är avtagande är snarlikt. Ett alternativt sätt är att observera att om f är avtagande så är $-f$ växande, och alltså integrerbar, och sen använda Övning 1.

Låt $\epsilon > 0$ och $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ där $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Låt $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $m_i = f(x_{i-1})$, $M_i = f(x_i)$ och $|I_i| = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ vara längden av I_i. Observera att eftersom f är växande så gäller $m_i \leq f(x) \leq M_i$ då $x \in I_i$.

Definiera Ψ och Φ genom att $\Psi(x) = M_i$ och $\Phi(x) = m_i$ då $x \in I_i$. Då är Φ och Ψ trappfunktioner och $\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$. Dessutom gäller

$$\begin{aligned}
I(\Psi) - I(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)|I_i| = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) \\
&= \frac{b-a}{n}\Big(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \\
&\qquad + \ldots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_n) - f(x_{n-1})\Big) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon
\end{aligned}$$

om n är tillräckligt stort. Så f är integrerbar enligt Sats 2. □

Det är lätt att se att om intervallet $[a, b]$ kan delas upp i ändligt många intervall där f är monoton så är f integrerbar. Detaljerna överlämnas till den intresserade läsaren.

Exempel 4. *Funktionen f definierad av*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{om } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

är inte *integrerbar på $[0, 1]$.*

Uppenbarligen gäller (Eller hur?) $\overline{I}(f) = I(\Phi)$ där $\Phi(x) = 1$ för alla x, och $\underline{I}(f) = I(\Psi)$ där $\Psi(x) = 0$ för alla x. Så $\overline{I}(f) = 1 \neq 0 = \underline{I}(f)$.

I Persson-Böiers bevisas att om f är kontinuerlig, eller något allmännare att f är kontinuerlig utom i ändligt många punkter, så är f integrerbar.

I själva verket gäller följande karakterisering av integrerbara funktioner.

Sats 5. *En begränsad funktion på $[a, b]$ är integrerbar om och endast om $\{x \in [a, b]; f \text{ inte är kontinuerlig i } x\}$ är en nollmängd.*

Definition 6. *En mängd $N \subset \mathbb{R}$ är en nollmängd om det till varje $\epsilon > 0$ finns uppräkneligt (eller ändligt) många intervall I_i så att $U \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ och $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \epsilon$.*

Beviset av Sats 5 ligger (långt) utanför vår kurs men för att få en känsla för begreppet nollmängd ger vi följande

Exempel 7. *Om U är en uppräknelig mängd så är U en nollmängd.*

Låt $x_1, x_2, \ldots$ vara en uppräkning av U och $\epsilon > 0$. Låt I_i var intervallet med mittpunkt x_i och längd $|I_i| = \dfrac{\epsilon}{2^n}$. Då gäller $U = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ och $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon$ så U är en nollmängd.

Övning 1. Visa att om f är integrerbar så är $-f$ också integrerbar.

Övning 2. Visa att $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Övning 3. Visa att en monoton funktion kan ha högst uppräkneligt många diskontinuitetspunkter.

Övning 4. Visa att det finns en begränsad växande funktion på $[0, 1]$ som har ett uppräkneligt antal diskontinuiteter.